

Gruppi di Lie e meccanica quantistica: un'applicazione

Francesco Genovese, IUSS

A. A. 2008-2009

Sommario

In questo articolo viene mostrata un'applicazione del formalismo matematico della teoria dei gruppi (in particolare, dei gruppi di Lie) alla meccanica quantistica. Viene presentato, all'inizio del lavoro, il Teorema di Noether, nell'ottica di "motivazione generale" dell'approccio alla fisica mediante la ricerca di simmetrie. Viene brevemente esposto il formalismo matematico utilizzato, e alcuni risultati generali che si possono dedurre mediante esso nel quadro della meccanica quantistica. Di seguito, i metodi esposti vengono sfruttati nel "caso concreto" dell'isospin (spin isobarico): si trattano i concetti di *multipletto di isospin* e di *numero quantico di isospin*, mostrando alcune realizzazioni in natura di tale simmetria (il doppietto protone-neutrone e il tripletto di pioni). Si discute infine di alcune simmetrie fisiche più generali.

1 Introduzione: il Teorema di Noether

Nello studio della Meccanica Analitica, ci si accorge che particolari simmetrie della lagrangiana implicano l'esistenza di *quantità conservate*, dette anche "integrali primi del moto". Per chiarezza, richiamiamo le *equazioni di Lagrange del moto* di un sistema olonomo con n coordinate (q_1, \dots, q_n) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

Ad esempio, se $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, è immediato verificare che $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{costante}$ (conservazione del momento coniugato). Nondimeno, sotto le ipotesi di sistema scleronomo (vincoli non dipendenti dal tempo) e potenziali ordinari, si può dimostrare che, se $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, allora l'energia totale $E = T + V$ è una costante del moto. Notiamo che abbiamo derivato costanti del moto nel momento in cui la lagrangiana del sistema era indipendente da un qualche parametro (una delle coordinate o il tempo, negli esempi), ipotesi evidentemente espressa nell'annullamento delle opportune derivate parziali. Il fatto essenziale è che tale "indipendenza" è a tutti gli effetti esprimibile come *invarianza della*

lagrangiana sotto opportune trasformazioni. Nei casi mostrati sopra, si trattava di trasformazioni di singole coordinate generalizzate o trasformazioni della coordinata temporale.

Esiste, in effetti, una fondamentale connessione tra *invarianza per simmetrie* del sistema considerato ed *esistenza di costanti del moto*. Tale connessione è descritta dal risultato che segue, pubblicato per la prima volta in un articolo di Emmy Noether del 1918 (cfr. [8]).

Teorema 1.1 (Noether). *Se l'azione $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ di un sistema fisico descritto da una lagrangiana L è invariante sotto trasformazioni lisce¹ delle coordinate², allora esiste una costante del moto.*

Notiamo che il Teorema di Noether non si applica nel caso di simmetrie discrete, come ad esempio l'inversione. Esiste una versione molto generale del teorema nell'ambito della teoria dei campi, in questo articolo ci limitiamo a fornire una semplicissima verifica del teorema in un caso molto specifico. Supponiamo cioè che il sistema abbia un solo grado di libertà (coordinata lagrangiana q) e che $L = L(q, \dot{q})$, cioè la lagrangiana non dipenda esplicitamente dal tempo. Supponiamo poi di avere una trasformazione liscia della sola coordinata q . Cioè, una mappa $s \mapsto q(s)$ liscia e indipendente dal tempo. Supponiamo che:

$$\frac{d}{ds} L(q(s), \dot{q}(s)) = 0$$

Le ipotesi del teorema sono di fatto verificate. Cerchiamo di dimostrare che la quantità $C = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{dq(s)}{ds}$ è una costante del moto. Per vederlo, basta calcolare la sua derivata rispetto al tempo:

$$\dot{C} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{dq(s)}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}(s)}{ds}$$

dove, implicitamente, è stato usato che la trasformazione è indipendente dalla coordinata temporale. A questo punto, basta notare che $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$ per le equazioni di Lagrange. Sostituendo, è abbastanza immediato accorgersi che effettivamente, grazie alla "regola della catena":

$$\dot{C} = \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq(s)}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}(s)}{ds} = \frac{d}{ds} L(q(s), \dot{q}(s)) = 0$$

E siamo arrivati.

Il Teorema di Noether ha una rilevanza fondamentale. Esso infatti motiva formalmente l'approccio concettuale della fisica moderna: la ricerca di *simmetrie* dei sistemi fisici per dedurre *leggi di conservazione*. Il Teorema di Noether si applica, come visto, nel caso di simmetrie "continue". Diventa dunque importante lo studio dei *gruppi* che tali trasformazioni formano.

¹In altre parole, si tratta di famiglie di trasformazioni di coordinate che variano in modo liscio.

²Si comprende, in questa dicitura, anche la coordinata temporale.

2 Gruppi e algebre di Lie

In base alle ipotesi del Teorema di Noether, è naturale occuparsi di “gruppi continui di trasformazioni”. Più precisamente, si tratta di *gruppi di Lie*. Diamo la definizione formale:

Definizione 2.1 (Gruppo di Lie). *Un gruppo di Lie è un gruppo G con una struttura di varietà differenziabile (reale o complessa), tale che le funzioni $(x, y) \mapsto xy$ e $x \mapsto x^{-1}$ siano differenziabili.*

Esempi di gruppi di Lie sono i gruppi moltiplicativi \mathbb{R}^* e \mathbb{C}^* , oppure la circonferenza $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ con la struttura di sottogruppo di \mathbb{C}^* . Sia poi $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}_0$. Il gruppo lineare generale $\text{GL}(n, K)$ è un gruppo di Lie. Se $K = \mathbb{R}$, allora il gruppo ortogonale $\text{O}(n)$ e il gruppo ortogonale speciale $\text{SO}(n)$ sono sottogruppi di Lie compatti di $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. Analogamente, se $K = \mathbb{C}$, il gruppo unitario $\text{U}(n)$ e il gruppo unitario speciale $\text{SU}(n)$ sono sottogruppi di Lie compatti di $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Segnaliamo che la teoria dei gruppi di Lie compatti è ben sviluppata, ed esistono teoremi di struttura e classificazione.

Diamo ora la definizione di *algebra di Lie*.

Definizione 2.2 (Algebra di Lie di dimensione finita). *Un'algebra di Lie (di dimensione finita) è uno spazio vettoriale L di dimensione finita su un campo K con un'operazione $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ tale che:*

1. $[\cdot, \cdot]$ è bilineare.
2. $[x, y] = -[y, x]$ per ogni $x, y \in L$.
3. Vale l'identità di Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ per ogni $x, y, z \in L$.

Un esempio familiare di algebra di Lie è dato dallo spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 con l'operazione di prodotto vettoriale. Le definizioni di gruppo di Lie e algebra di Lie sono indipendenti, ma vi è una stretta connessione tra queste due classi di oggetti. In effetti, si può definire in generale l'*algebra di Lie di un dato gruppo di Lie*. Tale definizione risulta piuttosto semplice nel momento in cui si considerano *gruppi di Lie di matrici*, cioè sottogruppi di Lie chiusi di $\text{GL}(n, \mathbb{C})$.

Definizione 2.3 (Algebra di Lie di un gruppo di Lie di matrici). *Sia G un gruppo di Lie di matrici. L'algebra di Lie di G è definita da:*

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : e^{tX} \in G \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Si può dimostrare, come ci si aspetta, che l'algebra di Lie di un gruppo di Lie di matrici è effettivamente un'algebra di Lie nel senso della Definizione 2.2. Basta prendere $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definita da $[A, B] = AB - BA$.

Segnaliamo che, in fisica, l'algebra di Lie di un gruppo di Lie di matrici è solitamente definita con e^{itX} al posto di e^{tX} . Vi sono differenze inessenziali tra una convenzione e l'altra. Da questo punto in poi, comunque, saranno adottate le convenzioni dei fisici. Supporremo, d'ora in poi, di trattare solo gruppi di Lie di matrici (quindi intenderemo sempre quello anche con la dicitura "gruppo di Lie"). Accettando di sacrificare un po' di formalismo, supporremo che gli elementi di un dato gruppo di Lie G siano rappresentati come *operatori* $\hat{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \mathbf{r})$, dipendenti in modo liscio da n parametri (reali) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ più, eventualmente, dalla coordinata \mathbf{r} . Sono detti *generatori* di G un insieme di elementi $\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n$ dell'algebra di Lie associata \mathfrak{g} tali che ogni operatore di G può essere scritto nella forma:

$$\hat{U}(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \mathbf{r}) = \exp \left(-i \sum_{k=1}^n \alpha_k \hat{L}_k \right)$$

Di fatto, tali generatori di G risultano essere una base dell'algebra di Lie \mathfrak{g} . Diventa dunque interessante occuparsi delle algebre di Lie per determinare completamente gli elementi dei gruppi di Lie collegati.

3 Multipletti, operatori invarianti, simmetrie

D'ora in poi ci metteremo in un quadro di meccanica quantistica, in cui viene fissato uno spazio di Hilbert degli stati del sistema. Il concetto di *multipletto*, di rilevanza importante in fisica, può essere espresso mediante il formalismo della teoria dei gruppi.

Definizione 3.1 (Multipletto). *Un multipletto (multiplet) è un sottospazio invariante irriducibile rispetto ad un dato gruppo di simmetrie che agisce sullo spazio di Hilbert degli stati del sistema.*

Questo significa che, detto G tale gruppo di simmetrie, un multipletto (rispetto a G) è un sottospazio dello spazio totale che viene lasciato fisso da G (è "invariante") e tale che non contiene strettamente alcun sottospazio invariante. Osserviamo incidentalmente che, dato uno stato ψ_0 , lo spazio dato da $\text{span}\{\hat{U}(\alpha)\psi_0 : \hat{U}(\alpha) \in G\}$ individua un multipletto.

3.1 Invarianza del sistema sotto un gruppo di simmetrie

In meccanica quantistica, gli stati del sistema (elementi dello spazio di Hilbert totale) soddisfano la seguente *equazione di Shrödinger*:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (3.1)$$

dove \hat{H} è l'operatore hamiltoniano del sistema considerato. Sia dato poi un gruppo di Lie di matrici G i cui elementi sono rappresentati come operatori

$\hat{U}(\alpha)$. Facciamo l'ipotesi che il sistema sia invariante sotto tale gruppo, cioè che, per ogni operatore $\hat{U}(\alpha)$, lo stato $\psi' = \hat{U}(\alpha)\psi$ soddisfi la stessa equazione di Schrödinger con la stessa hamiltoniana \hat{H} , cioè:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = \hat{H} \psi' \quad (3.2)$$

Esplicitando, e notando che $\hat{U}(\alpha)$ non dipende dal tempo, abbiamo:

$$i\hbar \hat{U}(\alpha) \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \hat{U}(\alpha) \psi = \hat{U}(\alpha) \hat{H} \psi$$

Da cui si deduce che:

$$\hat{H} \hat{U}(\alpha) = \hat{U}(\alpha) \hat{H} \quad (3.3)$$

Cioè, l'operatore hamiltoniano commuta con tutti gli operatori del gruppo di simmetrie considerato³. Possiamo esprimere tale proprietà utilizzando una notazione "bracket", analoga a quella delle algebre di Lie: $[\hat{H}, \hat{U}(\alpha)]_- = 0$. In particolare, troviamo che \hat{H} commuta con tutti i generatori \hat{L}_i del gruppo: $[\hat{H}, \hat{L}_i]_- = 0$ (vale anche il viceversa: se l'hamiltoniana commuta con i generatori, allora commuta con gli operatori del gruppo).

Vediamo cosa succede, in questo quadro, se consideriamo un *autostato dell'hamiltoniana*, cioè uno stato ψ_0 tale che $\hat{H}\psi_0 = E_0\psi_0$. Fissiamo un operatore $\hat{U}(\alpha)$ del nostro gruppo di simmetria. Allora, sfruttando la commutatività con l'hamiltoniana, troviamo:

$$\hat{U}(\alpha)\hat{H}\psi_0 = \hat{U}(\alpha)E_0\psi_0 = E_0(\hat{U}(\alpha)\psi_0) = \hat{H}(\hat{U}(\alpha)\psi_0) \quad (3.4)$$

Cioè, ogni elemento della forma $\hat{U}(\alpha)\psi_0$ è contenuto nell'autospazio di \hat{H} relativo all'autovettore E_0 . Lo stesso evidentemente vale per il multipletto $\text{span}\{\hat{U}(\alpha)\psi_0 : \hat{U}(\alpha) \in G\}$. Quanto trovato si può riassumere nel modo seguente: *l'hamiltoniana di un sistema è degenera su ogni suo multipletto rispetto ad un dato gruppo di simmetria del sistema.*

3.2 Operatori invarianti

Esponiamo ora il concetto di *operatore invariante* (o di Casimir).

Definizione 3.2 (Operatore invariante). *Sia G un gruppo di Lie di matrici, $\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n$ suoi generatori. Un operatore invariante di G è un operatore che risulti essere funzione bilineare dei generatori e che commuti con ciascuno dei generatori.*

Dalla definizione segue che un operatore invariante commuta con tutti gli operatori del gruppo di Lie in considerazione. In un caso particolare di gruppi di Lie, i cosiddetti gruppi di Lie *semisemplici*, vale il seguente teorema:

³Algebricamente, si può affermare che \hat{H} sta nel *centro* di tale gruppo.

Teorema 3.1 (Racah). *Sia G un gruppo di Lie di matrici semisemplice di rango l , siano $\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n$ suoi generatori. Allora esistono l operatori invarianti $\hat{C}_\lambda = \hat{C}_\lambda(\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n)$ ($\lambda = 1, \dots, l$) che commutano con i generatori e fra essi stessi.*

L'ipotesi di semisemplicità può apparentemente sembrare troppo restrittiva, ma in realtà tutti i gruppi di simmetria di interesse fisico la soddisfano. In tale ipotesi (sistema simmetrico rispetto ad un gruppo di Lie semisemplice), sfruttando quanto visto nella sezione precedente e applicando il Teorema di Racah, è possibile dimostrare che, rispetto agli stati di un dato multipletto, gli operatori invarianti possiedono sempre gli stessi autovalori C_1, \dots, C_l . Dunque *tali autovalori caratterizzano unicamente i multipletti*. In tal senso, essi sono “buoni numeri quantici”, cioè quantità invarianti. È altresì possibile definire “multipletto” come “insieme di stati che hanno gli stessi numeri quantici” (dati dagli autovalori C_1, \dots, C_l degli operatori invarianti). Osserviamo, incidentalmente, che *non sono ammesse transizioni del sistema da un multipletto ad un altro*.

4 Isospin (spin isobarico)

Dopo aver introdotto il formalismo matematico necessario e aver visto come “entra” in generale nella fisica, o meglio nella meccanica quantistica, passiamo ad un'applicazione “concreta”, trattando il cosiddetto *isospin* (spin isobarico).

4.1 Protoni, neutroni e la rivelazione del gruppo SU(2)

Cominciamo con qualche considerazione di carattere sperimentale, a motivazione del procedimento teorico che seguirà. La scoperta del neutrone avvenne nel 1932, da parte del fisico James Chadwick. Tale particella risulta essere per svariati aspetti molto simile al protone, al punto che si fece strada nei fisici nucleari l'idea che protone e neutrone fossero in realtà *due differenti stati della stessa particella*⁴. In effetti, protone e neutrone hanno le seguenti masse⁵:

$$\begin{aligned} m_p c^2 &= 938.272013 \pm 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ MeV} \\ m_n c^2 &= 939.565346 \pm 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ MeV} \end{aligned}$$

È possibile spiegare (parzialmente) la leggera differenza di massa in termini della differente interazione elettromagnetica delle due particelle (che, in

⁴Cfr. [6].

⁵Si veda [7] per un elenco dettagliato delle misure delle costanti fisiche fondamentali, comprese le masse di protone e neutrone.

effetti, hanno come ben noto differente carica). Nondimeno, in buona approssimazione, *si può supporre che protone e neutrone siano sostanzialmente indistinguibili rispetto all'interazione forte.*

Ciò detto, vediamo come tale ipotesi, dopo un po' di formalizzazioni, porti alla rivelazione di un gruppo di simmetria. Innanzitutto osserviamo che lo stato (funzione d'onda) ψ di un nucleone dipende dalla posizione \mathbf{r} , dal tempo t e dallo spin s . Indichiamo con ψ_p lo stato di un protone, con ψ_n quello di un neutrone. In base a quanto detto, possiamo supporre che gli stati ψ_p e ψ_n siano distinti esclusivamente da una *coordinata interna di isospin* τ . Cioè:

$$\begin{aligned}\psi_p &= \psi(\mathbf{r}, s, t, \tau = +1) \\ \psi_n &= \psi(\mathbf{r}, s, t, \tau = -1)\end{aligned}$$

Invece di utilizzare la coordinata interna τ , possiamo rappresentare in termini astratti lo stato del nucleone come un vettore di due componenti:

$$\psi(\mathbf{r}, s, t) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{r}, s, t) \\ u_2(\mathbf{r}, s, t) \end{pmatrix}$$

$|u_1(\mathbf{r}, s, t)|^2$ rappresenta la densità di probabilità di un protone (alla posizione \mathbf{r} , con spin s e al tempo t), $|u_2(\mathbf{r}, s, t)|^2$ quella di un neutrone, analogamente. Dunque possiamo scrivere, per gli stati ψ_p e ψ_n di un protone e di un neutrone, rispettivamente:

$$\psi_p = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Ora, introduciamo l'operatore $\hat{\tau}_3$ definito dalla matrice:

$$\hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Così facendo, lo stato “protonico” ψ_p corrisponde all'autovalore $+1$, e lo stato “neutronico” all'autovalore -1 di tale matrice:

$$\hat{\tau}_3 \psi_p = +1 \psi_p, \quad \hat{\tau}_3 \psi_n = -1 \psi_n$$

Questo è in linea con l'ipotesi fatta di “indistinguibilità” protone-neutrone: essi risultano distinti esclusivamente dal fatto di essere stati di nucleoni con autovalore rispettivamente $+1$ e -1 rispetto alla matrice $\hat{\tau}_3$. Ciò giustifica anche il formalismo di vettori colonna adottato, se vogliamo. L'idea, ora, è quella di costruire operatori matriciali 2×2 che trasformino il protone nel neutrone, e viceversa. Cominciamo notando che i seguenti vettori:

$$\chi_p = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

descrivono rispettivamente un protone e un neutrone nel medesimo stato χ (cioè: con la medesima funzione d'onda). Cerchiamo, a questo punto, un operatore che porti χ_p in χ_n , e viceversa. È semplice verificare che le seguenti matrici fanno al caso nostro:

$$\hat{\tau}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esse però sono matrici singolari. Introduciamo allora le seguenti matrici, che risultano essere non singolari ed hermitiane:

$$\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_+ + \hat{\tau}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_2 = -i(\hat{\tau}_+ - \hat{\tau}_-) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3$ sono le cosiddette *matrici di Pauli*. È semplice verificare che si comportano “bene” applicate gli stati χ_p e χ_n . A questo punto introduciamo gli operatori \hat{T}_k definiti da:

$$\hat{T}_k = \frac{1}{2}\hat{\tau}_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Si possono dimostrare le seguenti importanti (e caratterizzanti) *relazioni di commutazione*:

$$\hat{T}_i\hat{T}_j - \hat{T}_j\hat{T}_i = i\varepsilon_{ijk}\hat{T}_k \quad (4.4)$$

Grazie a esse, troviamo che $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ generano effettivamente un'algebra di Lie. È possibile determinare completamente gli operatori del gruppo di Lie ad essa associato (il *gruppo di isospin*). Il generico operatore è infatti dato da:

$$\hat{U}_{\text{is}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \exp\left(-i\sum_{k=1}^3 \varepsilon_k \hat{T}_k\right) \quad (4.5)$$

È a questo punto semplice verificare che, per ogni operatore \hat{U} del gruppo di isospin, si ha:

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1} \quad (4.6)$$

$$\det(\hat{U}) = 1 \quad (4.7)$$

Ci accorgiamo dunque che il gruppo di isospin è proprio il gruppo unitario speciale SU(2). Tale gruppo è un gruppo di Lie semisemplice, e i nucleoni (visti rispetto all'interazione forte) risultano essere invarianti per le simmetrie di tale gruppo. Si dice che essi sono *invarianti per isospin*.

Nella derivazione appena svolta si è partiti, come peraltro già espresso, dall'assunzione che *protone e neutrone fossero indistinguibili rispetto all'interazione forte*, assunzione motivata dai dati sperimentali sulla massa. Essi possono comunque essere distinti mediante gli autovalori dell'operatore \hat{T}_3

($1/2$ per il protone, $-1/2$ per il neutrone), oppure mediante gli autovalori del più espressivo *operatore di carica*:

$$\hat{Q} = e \left(\hat{T}_3 + \frac{1}{2} \right) \quad (4.8)$$

che risultano essere e (carica elementare) per il protone, 0 per il neutrone.

4.2 Un'altra evidenza sperimentale

Vi è un'altra importante evidenza sperimentale, oltre a quella della coppia protone-neutrone e ad essa analoga, che ora mostriamo. Si tratta dei tre *pioni*⁶ π_+ , π_0 , π_- . Essi hanno cariche distinte, rispettivamente e , 0 , $-e$, e masse date da⁷:

$$\begin{aligned} m_{\pi_+} c^2 &= 139.59 \text{ MeV} \\ m_{\pi_0} c^2 &= 135.00 \text{ MeV} \\ m_{\pi_-} c^2 &= 139.59 \text{ MeV} \end{aligned}$$

La sottile differenza di massa può essere, analogamente a quanto visto per protoni e neutroni, spiegata nei termini della differente interazione elettromagnetica delle tre particelle. E anche qui, in buona approssimazione, si può supporre che *le tre particelle siano sostanzialmente indistinguibili rispetto all'interazione forte*. Così, in analogia, anche l'insieme dei tre pioni risulta essere *invariante per isospin*.

Queste considerazioni di carattere sperimentale, insieme ad altre (che non citiamo), rendono ragionevole l'ipotesi che *l'interazione forte sia invariante sotto il gruppo di isospin*. In altri termini, ricordando i risultati esposti nelle sezioni precedenti, si suppone che:

$$[\hat{H}_{\text{strong}}, \hat{U}_{\text{is}}(\varepsilon)]_- = 0 \quad (4.9)$$

per ogni operatore $\hat{U}_{\text{is}}(\varepsilon) \in \text{SU}(2)$. \hat{H}_{strong} è l'operatore hamiltoniano dell'interazione forte. Segnaliamo che, assumendo tale ipotesi, è possibile dedurre che *le forze nucleari sono indipendenti dalla carica*.

4.3 Multipletti di isospin e numeri quantici di isospin

Ora veniamo a considerazioni più strettamente legate al gruppo $\text{SU}(2)$, che ci permetteranno di introdurre il concetto di *numero quantico di isospin*. $\text{SU}(2)$ ha come generatori gli operatori $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ descritti nel caso particolare della

⁶Abbreviazione per "mesone π ". I pioni con carica furono rivelati per la prima volta nel 1947.

⁷Cfr. [3, p. 144]

coppia protone-neutrone, caratterizzati completamente, in generale, dalle relazioni di commutazione (4.4). Introduciamo ora il seguente operatore:

$$\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2 \quad (4.10)$$

Si può dimostrare che \hat{T}^2 è un operatore invariante, anzi è l'*unico* operatore invariante di $SU(2)$. Grazie alla semisemplicità di $SU(2)$, diventa dunque interessante lo studio dei suoi autovalori, che come è noto caratterizzano completamente i multipletti del sistema considerato rispetto alla simmetria di $SU(2)$. Scriviamo i possibili autovalori di \hat{T}^2 come $T(T+1)$ ($T \geq 0$). Si può dimostrare il seguente essenziale fatto: *T può assumere solo valori interi o semiinteri* ($T = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$); *la dimensione di ciascun multipletto è data da $2T+1$* . Il numero T caratterizza completamente ogni multipletto di isospin ed è detto *numero quantico di isospin* del multipletto. Per $T=0$ abbiamo il singoletto banale; per $T=\frac{1}{2}$ abbiamo il “doppietto fondamentale di isospin” (il più piccolo multipletto non banale) che in natura si realizza nella coppia (p, n) di protone e neutrone; per $T=1$ troviamo il “tripletto di isospin” che in natura si può realizzare - come di fatto mostrato poco sopra - nei tre pioni (π_+, π_0, π_-) . Il numero quantico di isospin è caratteristica di ogni multipletto, dunque non permette di distinguere i singoli elementi di esso stesso; cionondimeno, la cosa è possibile grazie agli autovalori T_3 dell'operatore \hat{T}_3 , detti *proiezioni di isospin*. Ad esempio, nel caso del doppietto (p, n) ($T=\frac{1}{2}$), il protone è contraddistinto dalla proiezione di isospin $T_3 = \frac{1}{2}$, il neutrone da $T_3 = -\frac{1}{2}$; nel caso del tripletto (π_+, π_0, π_-) ($T=1$), a ciascuno dei tre pioni sono assegnate rispettivamente le proiezioni di isospin $+1, 0$ e -1 .

5 Conclusione: ulteriori simmetrie

Il gruppo di isospin permette di raggruppare, come si è visto, particelle elementari in multipletti. In sostanza, l'isospin fornisce un modo per classificare tali particelle, in un'ottica, se vogliamo, “unificatrice”. Nello sviluppo della fisica si va quindi alla ricerca di gruppi di simmetria che rendano possibile un livello sempre maggiore di “unificazione”. Esponiamo quest'idea con un breve esempio: consideriamo il gruppo di simmetria $SU(3)$. È evidente che $SU(2) \hookrightarrow SU(3)$; nondimeno, l'immersione vale per le algebre di Lie associate: $\mathfrak{su}(2) \hookrightarrow \mathfrak{su}(3)$. Da questo si può dedurre che *nei multipletti della simmetria di $SU(3)$ vi sono anche i multipletti di isospin*. In tal senso, la simmetria di $SU(3)$ risulta essere più generale della simmetria di isospin, informalmente si può dire che la “contiene al suo interno”. La simmetria di $SU(3)$ è essenziale in fisica perché permette di individuare il tripletto dei tre

quarks u, d, s (*up, down e strange*):

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

(u, d) è un doppietto di isospin, mentre s è un singoletto di isospin.

L'isospin è una simmetria sostanzialmente *globale* dell'interazione forte. In fisica, tuttavia, rivestono un'importanza fondamentale anche simmetrie di tipo *locale*, in particolare le cosiddette *simmetrie di gauge locali*; esse, d'altra parte, risultano essere più adatte in un quadro relativistico. Nascono così le *teorie di gauge*, ossia teorie quantistiche di campo in cui il sistema risulta essere invariante sotto determinate trasformazioni locali, dette *trasformazioni di gauge locali*, che formano un gruppo di Lie. Di fatto, usando le parole di Chen-Ning Franklin Yang⁸, *le simmetrie di gauge dettano la forma dell'interazione*. Un esempio di teoria di gauge è l'elettromagnetismo, che ha U(1) come gruppo di gauge. Lo stesso modello standard delle tre interazioni debole, forte ed elettromagnetica è una teoria di gauge, e il suo gruppo di simmetria è dato dal seguente prodotto diretto:

$$\text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1) \quad (5.2)$$

In generale, dunque, risulta chiaro come la Teoria dei Gruppi sia diventata uno strumento essenziale per i fisici. La ricerca di teorie unificatrici passa per l'individuazione di nuove e più generali simmetrie, descritte mediante opportuni gruppi. Allo stesso tempo, assume una rinnovata importanza la ricerca matematica "pura" su argomenti di algebra astratta, disciplina matematica che è spesso (e, alla luce di quanto visto, erroneamente) vista come completamente fine a sé stessa e distaccata dalla realtà.

Riferimenti bibliografici

- [1] John Baez. Noether's Theorem in a Nutshell, 2002. <http://math.ucr.edu/home/baez/noether.html>.
- [2] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, and John L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3rd edition, 2001.
- [3] Walter Greiner and Berndt Muller. *Quantum Mechanics: Symmetries*. Springer, 2nd edition, 1994.
- [4] David J. Gross. Gauge Theory - Past, Present, and Future? In *Chinese Journal of Physics*, volume 30, 1992.

⁸Cfr. [4]

- [5] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer, 2004.
- [6] Werner Heisenberg. Über den Bau der Atomkerne. I. *Zeitschrift für Physik*, 77(1), 1932.
- [7] National Institute of Standards and Technology. Fundamental physical constants from NIST, 2006. <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.
- [8] Emmy Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1918.