

# Problemi ellittici agli autovalori e discretizzazione: una breve panoramica

Francesco Genovese, IUSS

A. A. 2008-2009

## Sommario

Questo articolo espone brevemente il problema agli autovalori di equazioni di tipo ellittico. Viene presentato il quadro teorico nel caso continuo, cominciando con il caso speciale del problema di Dirichlet omogeneo e successivamente esponendo la formulazione generale. Di seguito si discute la questione della discretizzazione, riprendendo il caso del problema di Dirichlet omogeneo e mostrando per esso alcune stime d'errore.

## 1 Alcuni risultati nel caso continuo

### 1.1 Il problema di Dirichlet omogeneo agli autovalori

In questa trattazione considereremo come “problema modello” il *problema di Dirichlet omogeneo*:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

ove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  è un aperto limitato. Si definiscano ora  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \\ (u, v) &= \int_{\Omega} uv \, dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

Indicheremo sempre con  $\|\cdot\|$  la norma in  $L^2(\Omega)$  indotta da  $(\cdot, \cdot)$ . Osserviamo incidentalmente che, per ogni  $u, v \in H^1(\Omega)$ , si ha che  $(u, v)_{H^1} = a(u, v) + (u, v)$ , e che le due forme sopra definite sono bilineari, continue, simmetriche e definite positive, e anzi  $a$  risulta essere *coerciva* su  $H_0^1(\Omega)$ . Con tali definizioni, il problema (1.1) ha la seguente formulazione debole:

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.3)$$

ove  $f \in L^2(\Omega)$  e si cercano soluzioni  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Il problema agli autovalori associato a (1.1) è quindi il seguente: trovare  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che esiste  $u \neq 0$  che risolve il seguente:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

Ci occuperemo direttamente della formulazione debole di tale problema, cioè di trovare  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che esiste  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u \neq 0$  tale che:

$$a(u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.5)$$

Veniamo ora allo studio più specifico del problema appena esposto.

**Proposizione 1.1.** *Gli autovalori del problema (1.5) sono reali e positivi.*

*Dimostrazione.* Sia  $\lambda$  un autovalore, sia  $\varphi$  una corrispondente autofunzione. Allora, grazie al fatto che sia  $a$  sia  $(\cdot, \cdot)$  sono definite positive:

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi, \varphi) &= \lambda \|\varphi\|^2 = a(\varphi, \varphi) \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{a(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2} > 0 \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.2.** *Autofunzioni corrispondenti ad autovalori distinti di (1.5) sono ortogonali in  $L^2(\Omega)$  e in  $H_0^1(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $\lambda_1, \lambda_2$  autovalori,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , siano  $\varphi_1, \varphi_2$  corrispondenti autofunzioni. Cioè:

$$\begin{aligned} a(\varphi_1, v) &= \lambda_1(\varphi_1, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ a(\varphi_2, v) &= \lambda_2(\varphi_2, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Scegliendo  $v = \varphi_2$  nella prima e  $v = \varphi_1$  nella seconda e sfruttando la simmetria di  $a$ , sottraendo membro a membro troviamo:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

da cui si deduce che  $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ , essendo  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  per ipotesi. Questo dimostra l'ortogonalità in  $L^2(\Omega)$ . Per l'ortogonalità in  $H_0^1(\Omega)$ , basta ancora una volta porre  $v = \varphi_2$  nella prima equazione scritta sopra e sfruttare quanto appena mostrato per dedurre che:

$$a(\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_1(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

Dunque  $(\varphi_1, \varphi_2)_{H_0^1(\Omega)} = a(\varphi_1, \varphi_2) + (\varphi_1, \varphi_2) = 0$ , come volevamo. □

Veniamo ora alla questione dell'*esistenza* di autovalori, dandone una caratterizzazione. Definiamo:

$$\lambda_1 := \inf_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2} \quad (1.6)$$

**Proposizione 1.3.**  $\lambda_1$  è minorante di tutti gli autovalori di (1.5).

*Dimostrazione.* Sia  $\lambda$  un autovalore,  $\varphi$  una corrispondente autofunzione. Allora  $a(\varphi, \varphi) = \lambda(\varphi, \varphi)$ , da cui:

$$\lambda = \frac{a(\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{a(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2} \geq \inf_{v \neq 0} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2} = \lambda_1$$

□

Un risultato chiave è il seguente:

**Teorema 1.4.** Esiste  $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1 \neq 0$  tale che  $\lambda_1 = \frac{a(\varphi_1, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2}$ .

In sostanza, tale teorema afferma che l'estremo inferiore di (1.6) è raggiunto da una funzione  $\varphi_1$ , e dunque è effettivamente un minimo. Si può senz'altro scegliere  $\varphi_1$  in modo che  $\|\varphi_1\| = 1$ , cosicché si abbia:

$$\lambda_1 = a(\varphi_1, \varphi_1) \quad (1.7)$$

**Proposizione 1.5.**  $\lambda_1$  è autovalore, e  $\varphi_1$  è un'autofunzione ad esso relativa.

*Dimostrazione.* Bisogna dimostrare che  $a(\varphi_1, v) = \lambda_1(\varphi_1, v)$  per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Fissiamo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Abbiamo allora che, per bilinearità:

$$\begin{aligned} a(\varphi_1 + \alpha v, \varphi_1 + \alpha v) &= a(\varphi_1, \varphi_1) + \alpha^2 a(v, v) + 2\alpha a(\varphi_1, v) \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \lambda_1 + \alpha^2 a(v, v) + 2\alpha a(\varphi_1, v) \end{aligned}$$

Poi, sempre per bilinearità e poiché  $\|\varphi_1\|^2 = 1$ :

$$\|\varphi_1 + \alpha v\|^2 = 1 + 2\alpha a(\varphi_1, v) + \alpha^2 \|v\|^2$$

Per definizione di  $\lambda_1$ , è chiaro che  $a(\varphi_1 + \alpha v, \varphi_1 + \alpha v) \geq \lambda_1 \|\varphi_1 + \alpha v\|^2$ , da cui con qualche rapido calcolo si deduce che:

$$2\alpha(a(\varphi_1, v) - \lambda_1(\varphi_1, v)) + \alpha^2(a(v, v) - \lambda_1\|v\|^2) \geq 0$$

e tale disuguaglianza è vera per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ora, se per assurdo non fosse vera la tesi, con i semplici strumenti della risoluzione di disequazioni potremmo senz'altro trovare  $\alpha$  tale che l'espressione scritta sopra è negativa, arrivando ad una contraddizione. □

Adesso occupiamoci del secondo autovalore. Definiamo:

$$V_1 := \langle \varphi_1 \rangle^\perp$$

$$\lambda_2 := \inf_{v \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2}$$

Si può dimostrare tale estremo inferiore è raggiunto da una funzione  $\varphi_2 \in V_1 \setminus \{0\}$  (supponiamo anche in questo caso di prenderla normalizzata:  $\|\varphi_2\| = 1$ ). Notiamo che  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , poiché  $H_0^1(\Omega) \supseteq V_1$ . Ripetendo il ragionamento della Proposizione 1.5, si può mostrare che  $a(\varphi_2, v) = \lambda_2(\varphi_2, v)$  per ogni  $v \in V_1$ . Per vedere tale uguaglianza per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$  e concludere dunque che  $\lambda_2$  è autovalore con relativa autofunzione  $\varphi_2$ , si può procedere nel modo seguente. È chiaro che  $\langle \varphi_1 \rangle$  è un sottospazio di dimensione finita di  $H_0^1(\Omega)$ , dunque è chiuso in  $H_0^1(\Omega)$ . Vale allora il teorema di decomposizione ortogonale:

$$H_0^1(\Omega) = \langle \varphi_1 \rangle \oplus V_1$$

Allora, per ogni  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v = \alpha\varphi_1 + w$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $w \in V_1$ . Osserviamo peraltro che  $(v, \varphi_1) = \alpha(\varphi_1, \varphi_1) + (w, \varphi_1) = \alpha + 0 = \alpha$ . Così, abbiamo che:

$$\begin{aligned} a(\varphi_2, v) &= a(\varphi_2, \alpha\varphi_1 + w) \\ &= \alpha a(\varphi_2, \varphi_1) + a(\varphi_2, w) \\ &= \alpha \lambda_1(\varphi_2, \varphi_1) + \lambda_2(\varphi_2, w) \\ &= 0 + \lambda_2(\varphi_2, w) \\ &= \lambda_2(\varphi_2, \alpha\varphi_1) + \lambda_2(\varphi_2, w) \\ &= \lambda_2(\varphi_2, \alpha\varphi_1 + w) \\ &= \lambda_2(\varphi_2, v) \end{aligned}$$

Per trovare gli altri autovalori si procede induttivamente, ripetendo le tecniche dimostrative finora utilizzate. Il procedimento non si ferma, perché gli spazi funzionali in gioco sono di dimensione infinita. In definitiva risulterà che, per ogni  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$V_n = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle^\perp$$

$$\lambda_{n+1} = \min_{v \in V_n \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2}$$

$$\varphi_{n+1} \in \arg \min_{v \in V_n \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2}$$

ove  $\varphi_n \in V_{n-1} \setminus \{0\}$  è autofunzione corrispondente a  $\lambda_n$  tale che  $\|\varphi_n\| = 1$ . Da ciò deduciamo che le autofunzioni  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  costituiscono un sistema ortonormale in  $L^2(\Omega)$  (e peraltro risultano ortogonali in  $H_0^1(\Omega)$ ). Nondimeno, poiché  $H_0^1(\Omega) \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_n \supseteq \dots$ , si ha che  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ .

**Proposizione 1.6.** Sia  $\{\lambda_n\}$  la successione di autovalori costruita nel procedimento esposto. Allora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$$

**Proposizione 1.7.** L'autovalore  $\lambda_1$  è semplice.

**Proposizione 1.8.** Le autofunzioni  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  sono un sistema ortonormale completo di  $L^2(\Omega)$ .

Veniamo ora ad un'importante caratterizzazione degli autovalori  $\{\lambda_n\}$ .

**Teorema 1.9** (Principio di min-max). Si ha:

$$\lambda_n = \min_{W_n} \max_{v \in W_n \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2} \quad (1.8)$$

ove  $W_n$  varia nell'insieme di tutti i sottospazi di  $H_0^1(\Omega)$  di dimensione  $n$ .

*Dimostrazione.* Poniamo  $E_n := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ , lo spazio generato dalle prime  $n$  autofunzioni. Sia  $v \in E_n \setminus \{0\}$ . Allora  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$  con gli  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  non tutti nulli. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \max_{v \in E_n \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2} &= \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{a(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j)}{(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j)} \\ &= \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j a(\varphi_i, \varphi_j)}{\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j (\varphi_i, \varphi_j)} \\ &= \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 a(\varphi_i, \varphi_i)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \\ &= \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \end{aligned}$$

ove nei calcoli sono state usate le varie proprietà già in precedenza citate degli oggetti in gioco. Osserviamo che vale la seguente disuguaglianza, comunque presi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  reali non tutti nulli:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_n}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = \lambda_n$$

poiché la successione degli autovalori è nondecreciente. Nondimeno,  $\varphi_n$  è tale che  $\frac{a(\varphi_n, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} = \lambda_n$ , e chiaramente  $\varphi_n \in E_n \setminus \{0\}$ . Questo dimostra che  $\lambda_n$  è effettivamente il massimo di quell'espressione. A questo punto, per arrivare alla tesi, ci basta controllare che, fissato  $W_n$  sottospazio di dimensione  $n$  di  $H_0^1(\Omega)$ , si abbia:

$$\max_{v \in W_n \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|^2} \geq \lambda_n$$

(infatti, sappiamo già che  $\lambda_n = \max_{v \in E_n \setminus \{0\}} \frac{a(v,v)}{\|v\|^2}$ ). Per fare ciò, dimostriamo che esiste  $w \neq 0$  tale che  $w \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \rangle^\perp \cap W_n$ . Fissata una base  $\{\psi_j : j = 1, \dots, n\}$  di  $W_n$ , questo equivale all'esistenza di una soluzione non banale  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$  del sistema omogeneo:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\psi_i, \varphi_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

Ma tale sistema ha sicuramente una soluzione non banale, perché è omogeneo e ha  $n-1$  equazioni e  $n$  incognite. A questo punto, ricordando che per definizione  $\lambda_n = \min_{v \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \rangle^\perp \setminus \{0\}} \frac{a(v,v)}{\|v\|^2}$ , è chiaro che:

$$\max_{v \in W_n \setminus \{0\}} \frac{a(v,v)}{\|v\|^2} \geq \frac{a(w,w)}{\|w\|^2} \geq \lambda_n$$

Dunque la tesi risulta dimostrata. □

## 1.2 Il quadro generale: cenni

Quanto esposto nel caso particolare del problema di Dirichlet omogeneo si può generalizzare senza troppi patemi, e in questa parte dell'articolo daremo qualche cenno su come procedere.

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert,  $V$  un suo sottospazio chiuso. Siano poi  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  e  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  due forme bilineari simmetriche e continue. Inoltre, si supponga  $a$  coerciva e  $b$  un prodotto scalare (con norma indotta  $\|\cdot\|_H$ ). Dato  $f \in H$ , si consideri il seguente problema:

$$a(u, v) = b(f, v) \quad \forall v \in V \tag{1.9}$$

ove si cercano soluzioni  $u \in V$ . Notiamo che, per ipotesi,  $b(f, \cdot) \in V^*$ . Dunque, per il Lemma di Lax-Milgram, esiste un'unica soluzione del problema posto. In altre termini, possiamo definire un "operatore risolvete"  $T : H \rightarrow H$  che ad ogni  $f$  associa la soluzione  $Tf$  del problema con dato  $f$ . Cioè, per ogni  $f \in H$  si ha:

$$\begin{aligned} Tf &\in V \\ a(Tf, v) &= b(f, v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Il problema agli autovalori associato a (1.9) è trovare  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che esiste  $u \in V$  con:

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V \tag{1.10}$$

Osserviamo che gli autostati di tale problema sono le stesse associate all'inversa di  $T^1$ . Faremo l'ipotesi che  $T : H \rightarrow H$  sia un *operatore compatto*

---

<sup>1</sup>In effetti, se ristretto a  $V$ , l'operatore  $T$  risulta essere iniettivo.

(cioè, per ogni sottoinsieme limitato di  $H$ ,  $T(H)$  sia relativamente compatto in  $H$ ). In tal caso, essenzialmente tutto quanto mostrato nel caso del problema di Dirichlet omogeneo vale anche in generale, *mutatis mutandis*. Riassumendo, detti  $\{\lambda_n\}$  gli autovalori (ripetuti ciascuno in base alla propria molteplicità) di (1.10), ordinati in modo che  $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$  per ogni  $i$ , e dette  $\{\varphi_n\}$  le corrispondenti autofunzioni (normalizzate:  $b(\varphi_i, \varphi_i) = 1$ ), abbiamo che:

$$\begin{aligned}
a(\varphi_i, \varphi_j) &= b(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \forall i \neq j \\
V &= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \langle \varphi_n \rangle \\
\lambda_1 &= \min_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)}, \quad \varphi_1 \in \arg \min_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)} \\
\lambda_n &= \min_{v \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \rangle^\perp \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)}, \quad \varphi_n \in \arg \min_{v \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \rangle^\perp \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Vale anche il *principio di min-max*, espresso dall'equazione seguente:

$$\lambda_n = \min_{V_n} \max_{v \in V_n \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)} \tag{1.12}$$

ove  $V_n$  varia nell'insieme di tutti i sottospazi di  $V$  di dimensione  $n$ . Anche tale equazione è in perfetta analogia con la (1.8).

## 2 Discretizzazione

### 2.1 Discretizzazione del problema generale e convergenza degli autostati discreti

L'approccio naturale di discretizzazione del problema (1.9) è quello di “approssimare” lo spazio  $V$  con una famiglia di sottospazi  $\{V_h\}$  di dimensione finita ( $h > 0$  è il parametro di discretizzazione; si ponga  $\dim V_h := N(h)$ ). L'idea è che, per  $h \rightarrow 0$ ,  $V_h$  sia “prossimo” a  $V$ . Il problema discreto è espresso dalla seguente equazione:

$$a(u_h, v) = b(f, v) \quad \forall v \in V_h \tag{2.1}$$

ove si cercano soluzioni  $u_h \in V_h$ . Applicando il Lemma di Lax-Milgram, deduciamo che esso ammette unica soluzione, e possiamo così definire, in analogia al caso continuo, un “operatore risolvete discreto”  $T_h : H \rightarrow H$ ,  $f \mapsto T_h f$ , tale che:

$$\begin{aligned}
T_h f &\in V_h \quad \forall f \in H \\
a(T_h f, v) &= b(f, v) \quad \forall v \in V_h
\end{aligned}$$

$T_h$  è un operatore compatto, poiché  $V_h$  ha dimensione finita.

Il problema discreto agli autovalori, dunque, è espresso dalla seguente equazione:

$$a(u_h, v) = \lambda_h b(u_h, v) \quad \forall v \in V_h \quad (2.2)$$

Ordiniamo gli autovalori del problema discreto in questo modo (ciascuno ripetuto in base alla propria molteplicità):

$$\lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{N(h),h}$$

Con le dovute variazioni, valgono le proprietà espresse dalle (1.11) e anche il principio di min-max espresso dalla (1.12), che in questo caso si scrive così:

$$\lambda_i = \min_{V_{i,h}} \max_{v \in V_{i,h} \setminus \{0\}} \frac{a(v, v)}{b(v, v)} \quad \forall i = 1, \dots, N(h) \quad (2.3)$$

al variare di  $V_{i,h}$  nei sottospazi di dimensione  $i$  di  $V_h$ . Ovviamente i  $V_{i,h}$  sono anche sottospazi di dimensione  $i$  di  $V$ . Allora, il minimo di tale equazione è calcolato su un insieme contenuto in quello su cui è calcolato il minimo della (1.12). Dunque, deduciamo immediatamente il seguente risultato.

**Proposizione 2.1.** *Gli autovalori discreti approssimano da sopra quelli continui, cioè:*

$$\lambda_{i,h} \geq \lambda_i \quad \forall i = 1, \dots, N(h) \quad (2.4)$$

Veniamo ora al concetto di *convergenza* degli autostati discreti a quelli continui. Servono alcune definizioni preparatorie. Sia  $m : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$  la funzione che associa ad ogni numero intero positivo la dimensione dello spazio generato dalle autofunzioni relative ai primi  $N$  autovalori *distinti*. Con tale definizione, questi ultimi risultano essere  $\lambda_{m(1)}, \dots, \lambda_{m(N)}$ . Dati poi due sottospazi  $E, F$  di  $H$ , sia  $\hat{\delta}(E, F)$  il *divario* (“gap”) tra  $E$  e  $F$ , definito così:

$$\begin{aligned} \delta(E, F) &= \sup_{u \in E, \|u\|_H=1} \inf_{v \in F} \|u - v\|_H \\ \hat{\delta}(E, F) &= \max\{\delta(E, F), \delta(F, E)\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Allora, diciamo che gli autostati discreti  $\{(\lambda_{n,h}, \varphi_{n,h})\}$  convergono a quelli continui  $\{(\lambda_n, \varphi_n)\}$  se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $N \in \mathbb{N}_0$ , esiste  $h_0 > 0$  tale che, per ogni  $h$  con  $0 < h < h_0$ , si abbia:

$$\begin{aligned} \max_{i=1, \dots, m(N)} |\lambda_i - \lambda_{i,h}| &\leq \varepsilon \\ \hat{\delta} \left( \bigoplus_{i=1}^{m(N)} \langle \varphi_i \rangle, \bigoplus_{i=1}^{m(N)} \langle \varphi_{i,h} \rangle \right) &\leq \varepsilon \end{aligned} \quad (2.6)$$

**Teorema 2.2.** *Condizione necessaria e sufficiente alla convergenza degli autostati (2.6) è che:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T - T_h\|_{\mathcal{L}(H, H)} = 0 \quad (2.7)$$

## 2.2 Discretizzazione del problema di Dirichlet omogeneo e stime d'errore per gli autostati

Riprendiamo ora il problema di Dirichlet omogeneo (1.1), e supponiamo per semplicità che il dominio  $\Omega$  sia contenuto in  $\mathbb{R}^2$ . Discretizziamolo facendo uso degli elementi finiti, scegliendo una famiglia  $\{S_h\}$  di spazi di funzioni continue lineari a tratti su una griglia triangolare, con  $\dim S_h = N(h)$  e scegliendo per ciascun  $S_h$  la base delle funzioni a piramide  $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N(h)}$  (piccolo abuso di notazione:  $\Phi_i$  sta per  $\Phi_{i,h}$ ). Con le stesse notazioni definite in (1.2), il problema agli autovalori discreto è dunque espresso dalla seguente:

$$a(u_h, \chi) = \lambda(u_h, \chi) \quad \forall \chi \in S_h \quad (2.8)$$

Possiamo ovviamente limitarci a usare gli elementi della base scelta come funzioni test, in altre parole quell'equazione è equivalente a:

$$a(u_h, \Phi_i) = \lambda(u_h, \Phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N(h)$$

Cerchiamo autofunzioni  $u_h \in S_h$ , dunque, posto  $u_h = \sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_j \Phi_j$ , ci riduciamo a risolvere il seguente sistema in  $\lambda$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_{N(h)}$ :

$$\sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_j a(\Phi_j, \Phi_i) = \lambda \sum_{j=1}^{N(h)} \alpha_j (\Phi_j, \Phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N(h)$$

il quale, posto  $A = (a(\Phi_i, \Phi_j))_{i,j}$  e  $B = ((\Phi_i, \Phi_j))_{i,j}$ , si esprime nella seguente equazione matriciale:

$$A\mathbf{u} = \lambda B\mathbf{u} \quad (2.9)$$

Detti da questo momento in poi  $T$  l'operatore risolvete del problema di Dirichlet omogeneo debole (1.3) e  $T_h$  l'operatore risolvete del problema discretizzato nel modo appena esposto, si può dimostrare la seguente stima, nell'ipotesi che il dominio  $\Omega$  sia convesso e tale che  $\partial\Omega$  sia liscio:

$$\|(T - T_h)f\| \leq Ch^2 \|f\| \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

Essa evidentemente implica la (2.7) e, in virtù del Teorema 2.2, la convergenza degli autostati discreti a quelli continui.

Ora, citiamo due risultati che saranno utilizzati nell'immediato seguito.

**Proposizione 2.3.** *Si supponga il dominio  $\Omega$  tale che  $\partial\Omega$  sia liscio. Allora, per ogni  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $Tf \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  ed esiste  $C > 0$  indipendente da  $f$  tale che:*

$$\|Tf\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|$$

In tal caso si ha poi che  $f = \Delta(Tf)$ , e deduciamo allora che esiste  $C > 0$  tale che:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad (2.10)$$

**Teorema 2.4.** *Si supponga il dominio  $\Omega$  convesso. Sia poi  $P_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow S_h$  la proiezione sul sottospazio  $S_h$ . Allora esiste  $C > 0$  tale che:*

$$\|P_h v - v\| \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad (2.11)$$

Veniamo finalmente alle stime d'errore su autovalori e autofunzioni del problema di Dirichlet omogeneo. Indichiamo con  $\{\lambda_n\}$  e  $\{\varphi_n\}$  gli autovalori e le rispettive autofunzioni (normalizzate) del problema continuo (1.5), e con  $\{\lambda_{n,h}\}$  e  $\{\varphi_{n,h}\}$  quelli del problema discretizzato (2.8). Supponiamo inoltre che il dominio  $\Omega$  sia convesso e con  $\partial\Omega$  liscio.

**Teorema 2.5.** *Per ogni  $n \in \mathbb{N}_0$ , esistono  $K_n > 0$  e  $h_0 > 0$  tali che, per ogni  $h$  con  $0 < h < h_0$ , si ha:*

$$\lambda_n \leq \lambda_{n,h} \leq \lambda_n + K_n h^2 \quad (2.12)$$

*Dimostrazione.* La disuguaglianza  $\lambda_n \leq \lambda_{n,h}$  è già stata vista (Proposizione 2.1). Occupiamoci dunque dell'altra disuguaglianza. Siano  $P_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow S_h$  la proiezione sul sottospazio  $S_h$  rispetto al prodotto scalare  $a(\cdot, \cdot) = (\nabla \cdot, \nabla \cdot)$ ,  $E_n := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ , e  $E_{n,h} = P_h E_n = \langle \varphi_{1,h}, \dots, \varphi_{n,h} \rangle$ . Abbiamo che:

$$\lambda_{n,h} = \frac{\|\nabla \varphi_{n,h}\|^2}{\|\varphi_{n,h}\|^2} \leq \max_{\chi \in E_{n,h} \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla \chi\|^2}{\|\chi\|^2} = \max_{v \in E_n \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla P_h v\|^2}{\|P_h v\|^2}$$

Per stimare il numeratore dell'espressione, usiamo il fatto che  $\|\nabla P_h v\| \leq \|\nabla v\|$ . Per quanto riguarda il denominatore, la questione è più delicata. Innanzitutto notiamo che, usando una disuguaglianza triangolare<sup>2</sup>, per  $v \in E_n$  si ha:

$$\|P_h v\| = \|v - (P_h v - v)\| \geq \| \|v\| - \|P_h v - v\| \| \geq \|v\| - \|P_h v - v\|$$

Ora, poiché  $v \in E_n$ , si ha che di fatto  $v \in H^2(\Omega)$  (si può sfruttare la Proposizione 2.3). Valgono allora le stime (2.10) e (2.11), e dunque:

$$\|P_h v - v\| \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|\Delta v\|$$

ove  $C > 0$  è una costante (non dipendente da  $v$ ). Ora, poiché  $v \in E_n$ , abbiamo che  $v = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$  per opportuni  $a_i$ , e usando che effettivamente  $\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ , troviamo che:

$$\|\Delta v\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \varphi_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i \lambda_i| \|\varphi_i\| \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \lambda_n n \sqrt{n} \|v\|$$

ove la penultima stima discende dal fatto che  $\{\lambda_n\}$  è nondecrescente e a termini positivi, e l'ultima disuguaglianza è una conseguenza di  $AM \leq QM^3$ . Allora, posto  $C_n := C \lambda_n n \sqrt{n}$ , si ha:

$$\|P_h v - v\| \leq C_n h^2 \|v\| \quad (2.13)$$

<sup>2</sup> $\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\|$

<sup>3</sup>Si intende la disuguaglianza tra media aritmetica e media quadratica.

E quindi, tenendo presente un precedente passaggio:

$$\|P_h v\|^2 \geq \|v\|^2 (1 - C_n h^2)^2$$

Da cui immediatamente:

$$\frac{1}{\|P_h v\|^2} \leq \frac{1}{\|v\|^2} \frac{1}{(1 - C_n h^2)^2}$$

Ora notiamo che, supponendo  $C_n h^2 < 1$ :

$$\frac{1}{(1 - C_n h^2)^2} = \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (C_n h^2)^k \right) \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} (C_n h^2)^k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1) (C_n h^2)^{2k}$$

grazie al prodotto alla Cauchy. Ma d'altra parte:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1) (C_n h^2)^{2k} &= 1 + 2(C_n h^2)^2 + C_n^4 h^8 \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+3) (C_n h^2)^{2k} \\ &= 1 + 2C_n^2 h^4 + h^8 q(h) \end{aligned}$$

ove  $q$  è limitata (da una certa costante  $M$ ) se  $C_n h^2 < 1$ . Se poi  $h < 1$ , allora  $h^8 < h^4 < h^2$ , e in definitiva avremo che:

$$\frac{1}{(1 - C_n h^2)^2} \leq 1 + 2C_n h^2 + h^2 M = 1 + (2C_n + M) h^2$$

per  $h$  sufficientemente piccolo. A questo punto, mettendo insieme le stime fatte e ricordando che  $\lambda_n = \max_{v \in E_n \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla v\|^2}{\|v\|^2}$ , troviamo che:

$$\lambda_{n,h} \leq \max_{v \in E_n \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla v\|^2}{\|v\|^2} (1 + (2C_n + M) h^2) = \lambda_n + \lambda_n (2C_n + M) h^2 = \lambda_n + K_n h^2$$

E questo completa la dimostrazione.  $\square$

Per quanto concerne la stima dell'errore sulle autofunzioni, ci occuperemo per semplicità solo di  $\varphi_1$  e  $\varphi_{1,h}$ .

**Teorema 2.6.** *Esistono  $C_1, C_2 > 0$ ,  $h_0 > 0$  tale che, per ogni  $h$  con  $0 < h < h_0$ , si ha:*

$$\|\varphi_{1,h} - \varphi_1\| \leq C_1 h^2 \tag{2.14}$$

$$\|\nabla \varphi_{1,h} - \nabla \varphi_1\| \leq C_2 h \tag{2.15}$$

*Dimostrazione.* Riprendiamo le notazioni della dimostrazione precedente. Consideriamo  $P_h \varphi_1 \in S_h$ . Chiaramente possiamo scriverlo come combinazione lineare delle autofunzioni discrete:

$$P_h \varphi_1 = \sum_{i=1}^{N(h)} a_i \varphi_{i,h}$$

e per ortonormalità si ha che  $a_j = (P_h \varphi_1, \varphi_{j,h})$  per ogni  $j = 1, \dots, N(h)$ . Notiamo che gli  $a_j$  sono i coefficienti di Fourier di  $P_h \varphi_1$  rispetto al sistema ortonormale  $\{\varphi_{n,h}\}_{n=1}^{N(h)}$ , che risulta essere banalmente completo in  $S_h$ . Vale dunque l'identità di Parseval, che scriviamo nel seguente modo:

$$\|P_h \varphi_1 - a_1 \varphi_{1,h}\|^2 = \sum_{j=2}^{N(h)} a_j^2 \quad (2.16)$$

Ora, grazie alla (2.8) e alla proprietà di ortogonalità di  $P_h$ , abbiamo che, per ogni  $j = 1, \dots, N(h)$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{j,h} a_j &= \lambda_{j,h} (P_h \varphi_1, \varphi_{j,h}) = a(P_h \varphi_1, \varphi_{j,h}) = a(\varphi_1, \varphi_{j,h}) \\ &= \lambda_1 (\varphi_1, \varphi_{j,h}) \end{aligned}$$

Da cui:

$$(\lambda_{j,h} - \lambda_1) a_j = \lambda_1 (\varphi_1, \varphi_{j,h}) - \lambda_1 a_j = \lambda_1 (\varphi_1 - P_h \varphi_1, \varphi_{j,h})$$

Ora, usiamo che  $\lambda_{j,h} \leq \lambda_j$  (la prima disuguaglianza dell'equazione 2.12) e che  $\lambda_1$  è un autovalore semplice (si veda Proposizione 1.7), e dunque:

$$\lambda_{j,h} - \lambda_1 \geq \lambda_j - \lambda_1 \geq \lambda_2 - \lambda_1 > 0 \quad \forall j \geq 2$$

Deduciamo allora che:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(h)} a_j^2 &\leq \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \sum_{j=1}^{N(h)} (\varphi_1 - P_h \varphi_1, \varphi_{j,h})^2 \\ &= \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \left( \sum_{j=1}^{N(h)} (\varphi_1, \varphi_{j,h})^2 - 2 \sum_{j=1}^{N(h)} (P_h \varphi_1, \varphi_{j,h}) (\varphi_1, \varphi_{j,h}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N(h)} (P_h \varphi_1, \varphi_{j,h})^2 \right) \end{aligned}$$

A questo punto, osserviamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(h)} (P_h \varphi_1, \varphi_{j,h})^2 &= \sum_{j=1}^{N(h)} a_j^2 = \|P_h \varphi_1\|^2 \\ 2 \sum_{j=1}^{N(h)} (P_h \varphi_1, \varphi_{j,h}) (\varphi_1, \varphi_{j,h}) &= 2 \sum_{j=1}^{N(h)} a_j (\varphi_1, \varphi_{j,h}) = 2(P_h \varphi_1, \varphi_1) \end{aligned}$$

La disuguaglianza di Bessel applicata al sistema ortonormale  $\{\varphi_{n,h}\}_{n=1}^{N(h)}$  in  $L^2(\Omega)$  ci assicura che:

$$\sum_{j=1}^{N(h)} (\varphi_1, \varphi_{j,h})^2 \leq \|\varphi_1\|^2$$

Allora troviamo che:

$$\sum_{j=1}^{N(h)} a_j^2 \leq \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \|P_h \varphi_1 - \varphi_1\|^2 \leq C^2 \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} h^4$$

ove l'ultima disuguaglianza segue dalla (2.13) e dal fatto che  $\|\varphi_1\| = 1$ . Dalla (2.16) deduciamo che:

$$\|P_h \varphi_1 - a_1 \varphi_{1,h}\| \leq C \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} h^2$$

Siamo quasi arrivati alla stima voluta. Intanto, grazie alla disuguaglianza triangolare, troviamo che:

$$\|\varphi_1 - \varphi_{1,h}\| \leq \|a_1 \varphi_{1,h} - \varphi_1\| + \|a_1 \varphi_{1,h} - \varphi_{1,h}\|$$

Dunque ci restano solo da stimare quelle due quantità. Per la prima, abbiamo che (per disuguaglianza triangolare e stime già viste):

$$\|a_1 \varphi_{1,h} - \varphi_1\| \leq \|P_h \varphi_1 - \varphi_1\| + \|P_h \varphi_1 - a_1 \varphi_{1,h}\| \leq C \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) h^2$$

Per quanto riguarda la seconda, supponiamo senza perdere in generalità che  $a_1 \geq 0$  (se necessario, basta cambiare segno a  $\varphi_{1,h}$ ). Dunque:

$$\begin{aligned} \|a_1 \varphi_{1,h} - \varphi_{1,h}\| &= |a_1 - 1| = \left| \|a_1 \varphi_{1,h}\| - \|\varphi_{1,h}\| \right| \\ &\leq \|a_1 \varphi_{1,h} - \varphi_{1,h}\| \leq C \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) h^2 \end{aligned}$$

grazie alla disuguaglianza triangolare  $\left| \|v\| - \|w\| \right| \leq \|v - w\|$  e alla stima precedente. In definitiva:

$$\|\varphi_1 - \varphi_{1,h}\| \leq 2C \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) h^2 = C_1 h^2$$

Questo dimostra la (2.14).

Per quanto riguarda la stima sul gradiente, ricordiamo che  $(\nabla \cdot, \nabla \cdot) = a(\cdot, \cdot)$ , e sfruttiamo le stime già viste (tra cui quella sugli autovalori). Per  $h$  sufficientemente piccolo, si ha:

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi_{1,h} - \nabla \varphi_1\|^2 &= \|\nabla \varphi_{1,h}\|^2 - 2(\nabla \varphi_{1,h}, \nabla \varphi_1) + \|\nabla \varphi_1\|^2 \\ &= \lambda_{1,h} - 2\lambda_1(\varphi_{1,h}, \varphi_1) + \lambda_1 = (\lambda_{1,h}) - \lambda_1 + \lambda_1 \|\varphi_{1,h} - \varphi_1\|^2 \\ &\leq K_1 h^2 + C_1^2 h^4 \leq (K_1 + C_1^2) h^2 = C_2 h^2 \end{aligned}$$

Quindi anche la (2.15) risulta dimostrata.  $\square$

## Riferimenti bibliografici

- [1] Daniele Boffi. Compatible Discretizations for Eigenvalue Problems. In *Compatible Spatial Discretizations*, pages 121–142. Springer, 2006.
- [2] Stig Larsson and Vidar Thomée. *Partial Differential Equations with Numerical Methods*. Springer, 2005.