Appunti di Geometria B

Francesco Genovese

15 gennaio 2008

Roba presa e riassunta a parole mie speriamo abbastanza schematicamente dal libro *Differential Geometry of Curves and Surfaces* di Manfredo Do Carmo, un pacco di roba da fare! Seguirò la struttura del Do Carmo per velocizzare il lavoro...

Un accorgimento scemo sulla notazione usata. A volte scriverò "$\equiv$" intendendo "identicamente uguale", cioè "uguale per tutti gli elementi" (di un dato insieme), ma lo userò solo nei casi in cui io abbia voglia di rimarcare il fatto che è "identicamente", oppure quando possa risultare ambiguo scrivere il solo "$=$". Quindi alla fine nello scrivere 'sta dispensa non mi farò troppi patemi nel distinguere l'uso dei due simboli, a meno che non vi sia proprio bisogno o che non abbia proprio voglia.

Un altro accorgimento. A volte non specificherò la dipendenza di un'espressione da una certa variabile, talvolta lo dirò esplicitamente, in ogni caso il motivo è semplicemente estetico.

1 Curve in $\mathbb{R}^3$

1.1 Prime definizioni

Definizione 1.1 (Curva parametrizzata differenziabile in $\mathbb{R}^3$)**.** *Una curva parametrizzata differenziabile in $\mathbb{R}^3$ è un'applicazione differenziabile*

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$$

ove $I = (a, b)$ è un qualsiasi intervallo aperto[1] *di $\mathbb{R}$.*

Molto semplice, no? Tu dai direttamente la *parametrizzazione* (cioè, quella funzione α) che ti dà la curva parametrizzata. Qualcosa da dire:

- Qui in geometria, con *differenziabile* si intende molto semplicemente C^∞. Insomma derivabile quante volte si vuole, con derivata continua ecc. ecc.

[1] In realtà spesso e volentieri lo si può prendere semiaperto o chiuso senza troppi patemi, solitamente con la condizione che l'applicazione sia differenziabile nel suo interno.

- Nota che la definizione data sopra è di *curva parametrizzata*, non di *curva* in generale. In effetti la definizione data non può in alcun modo prescindere dalla parametrizzazione (cioè, dalla funzione α) assegnata. Poi si darà una definizione più generale (per quanto con certe differenze rispetto a quella data ora).

- L'immagine $\alpha(I)$ si dice *traccia* della curva. È in sostanza "quel che vedi". Magari due curve parametrizzate diverse, cioè con due parametrizzazioni diverse, hanno la stessa traccia, che ne sai? Anzi, facciamo già l'esempio:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t, 0), \text{ e} \\ \beta(t) &= (\cos 2t, \sin 2t, 0) \end{aligned}$$

  per $t \in I = (0, 2\pi)$, han la stessa traccia. Infatti vedi subito, senza patemi (non sto nemmeno a fare la dimostrazione rigorosa) che $\alpha(I) = \beta(I) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, cioè la circonferenza unitaria sul piano $z = 0$, ovviamente (in realtà la circonferenza tolto il punto $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$, per avere iniettività della parametrizzazione, vabeh)!

- È molto importante considerare la *derivata prima* della curva parametrizzata, cioè:

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

  ove ovviamente $x(t), y(t), z(t)$ sono le tre componenti della curva α prese *nella base canonica* (si fisserà quasi sempre la base canonica, per avere la nozione più naturale di ortogonalità!) dello spazio $\mathbb{R}^3$. La derivata prima è detta *vettore tangente* (perché in effetti è proprio così, è proprio tangente alla traccia della curva!)

Ora, entriamo un po' più nel merito della teoria:

Definizione 1.2 (Curva regolare)**.** *Una curva differenziabile parametrizzata* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *è regolare se* $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ $\forall\, t \in I$.

In pratica, non ci piacciono i punti del nostro intervallo I in cui vale $\alpha'(t) = \mathbf{0}$, punti con *vettore tangente nullo*, diciamo (sì, nel libro non è evidenziato in grassetto ma ovviamente quello "zero" è lo *zero vettore di* $\mathbb{R}^3$).

Ora, vediamo che certe parametrizzazioni sono più fighe di altre. Intanto, data una curva parametrizzata regolare α (sì, da questo momento in poi il libro vuole supporle regolari, quindi vabeh), introduci la cosiddetta *lunghezza d'arco*, che è la cosa più naturale che uno potrebbe immaginare, e viene dall'analisi già vista. Cioè, tu fissa un "punto di partenza" $t_0 \in I$ e poi definisci la seguente funzione che non è altro che un *integrale di linea*:

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\xi)|\, d\xi$$

È proprio l'integrale che misura la *lunghezza dell'arco di curva tra* t_0 *e* t, cioè di un arco di curva "generico", diciamo. Nota ora che, se $|\alpha'(t)| = 1\ \forall\, t \in I$, allora

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} 1\, d\xi = t - t_0$$

cioè la lunghezza dell'arco di curva misurato tra quei due punti (presi arbitrariamente, chiaro, quindi è come dire "per ogni"!) è proprio uguale a $t - t_0$. E vale anche il viceversa, abbastanza intuitivamente! E ora...

Definizione 1.3 (Curva parametrizzata per lunghezza d'arco)**.** *Una curva parametrizzata* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *è parametrizzata per lunghezza d'arco se* $|\alpha'(t)| = 1\ \forall\, t \in I$*.*

Notiamo alcune cose interessanti e anche utili:

- Se una curva è parametrizzata per lunghezza d'arco, il parametro è indicato con s più che con t. Cioè, avrai la curva $\alpha(s)$, vabeh, una roba di notazione da puntualizzare ma nulla di che.

- Una cosa ovvia ma da notare: se una curva è parametrizzata per lunghezza d'arco, allora è sicuramente regolare, infatti banalmente $|\alpha'(s)| = 1 \neq 0\ \forall\, s \in I$.

- *Riparametrizzazione di curve secondo parametro d'arco.* Questa è una cosa interessante, invece. Mettiti ovviamente nell'intervallo I, con un dato (quello che ci pare, non è influente in realtà in ciò che vogliamo fare) "punto di partenza" $t_0 \in I$. Siccome per definizione $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\alpha'(\xi)|\, d\xi$, allora ovviamente $\dfrac{ds}{dt} = |\alpha'(t)| \neq 0$ (teorema fondamentale del calcolo, poi per la regolarità della curva hai che la derivata non si annulla mai). *A questo punto, dall'espressione ricavata, scrivi* t *come funzione di* s*, cioè* $t = t(s)$. Concettualmente quello che si fa è *invertire la funzione* s (si può fare, infatti $s : I \to J$, ove J è l'immagine di I, è nondecrescente essendo l'integrale di una funzione positiva, quindi è iniettiva, dunque è biunivoca essendo iniettiva e ristretta alla sua immagine), e operativamente si procede come detto, l'unico guaio è solo un po' di abuso di notazione, mi sa. Ora, per il teorema della derivata della funzione inversa, scriviamo – ancora, abuso di notazione – che $t'(s) = \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{|\alpha'(t(s))|}$. Adesso notiamo che, per quanto abbiamo stabilito finora e per come abbiamo posto $t = t(s)$, si ha: $\alpha(t) = \alpha(t(s)) = (\alpha \circ t)(s) =: \beta(s)$. Questa nuova parametrizzazione $\beta(s)$ (attenzione: $s \in J$, quindi l'intervallo di definizione della nuova parametrizzazione in generale cambia) è una parametrizzazione per lunghezza d'arco! Insomma, s ti dà la lunghezza d'arco, se io scrivo il vecchio parametro t in funzione della lunghezza d'arco e poi però prendo una nuova curva parametrizzata ottenuta mediante la composizione fatta sopra (*cioè alla fine ti ritrovi una funzione della sola s, ecco*), avrò sicuramente una parametrizzazione per lunghezza d'arco! Infatti, facendo il calcolo della derivata, si trova: $\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \alpha'(t(s))\frac{1}{|\alpha'(t(s))|}$, quindi trovi immediatamente $|\beta'(s)| = 1$ ($\forall\, s \in J$, ovviamente), come volevamo. Si tratta di una curva parametrizzata con la stessa traccia di α (pensaci un attimo, deve per forza essere così!), ma stavolta con parametro d'arco.

1.2 Risultati di teoria locale delle curve parametrizzate per lunghezza d'arco

Si supporrà d'ora in poi di avere curve *parametrizzate per lunghezza d'arco*. Si definiscono valori particolari con interesse geometrico ottenuti tramite varie derivazioni e pasticci vari.

Definizione 1.4 (Curvatura)**.** *Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva parametrizzata per lunghezza d'arco, definisci $|\alpha''(s)| =: k(s)$ la curvatura di α in s.*

L'idea è che, siccome la "velocità" della curva (data da $|\alpha'(s)|$) è costante e unitaria, la derivata seconda misura *di quanto varia l'angolo formato dalle rette tangenti in punti fra loro vicini* (è banalmente l'idea della curva compiuta da una cosa come un'automobile, e la forza centripeta... ma dai?).

- *Curvatura di una retta.* Prendi la retta scritta ovviamente in forma parametrica, cioè sarà $\alpha(s) = \mathbf{u}s + \mathbf{v}$, ove $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e poi $|\mathbf{u}| = 1$ (altrimenti non avrebbe parametro d'arco, se non ci credi deriva e vedi subito 'sta cosa). Ora, troviamo facendo un conto scemo che $k(s) = |\alpha''(s)| \equiv 0$. Come ci aspetteremmo, la curvatura di una retta è identicamente nulla (clap clap, che scoperta). Attenzione, vale anche il viceversa! Se infatti prendi α sempre parametrizzata con parametro d'arco tale che $k(s) = |\alpha''(s)| \equiv 0$, ottieni ovviamente che $\alpha''(s) \equiv \mathbf{0}$ (questo, se vuoi, per la proprietà della norma euclidea). Da qui, integri e trovi ovviamente una funzione costante: $\alpha'(s) \equiv \mathbf{u}$ per un certo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ con $|\mathbf{u}| = 1$; la costante deve essere di modulo 1 perché l'ipotesi base è sempre quella di avere parametrizzazione per lunghezza d'arco, ricorda! Poi integri ancora e hai immediatamente che $\alpha(s) = \mathbf{u}s + \mathbf{v}$, per un certo altro $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Il fatto appena visto si riassume in: *una curva parametrizzata per lunghezza d'arco $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è una retta se e solo se $k(s) \equiv 0$.*

- *Curvatura di una circonferenza (I).* Stavolta, prendi una circonferenza di raggio $r > 0$, per semplicità quella nel piano $\{z = 0\}$, con tale parametrizzazione:

$$\alpha(s) = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0), \quad s \in (0, 2\pi r)$$

(in realtà non è proprio la circonferenza ma la circonferenza "senza il punto di partenza"). Derivando, troviamo $\alpha'(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}, 0)$. Ora, notiamo che (conto scemo) $|\alpha'(s)| = \sqrt{\sin^2\frac{s}{r} + \cos^2\frac{s}{r}} = 1$, quella è dunque una parametrizzazione per lunghezza d'arco. Deriviamo ancora e troviamo $\alpha''(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}, 0)$. Dunque facendo il conto:

$$k(s) = |\alpha''(s)| = \sqrt{\frac{1}{r^2}\left(\sin^2\frac{s}{r} + \cos^2\frac{s}{r}\right)} = \sqrt{\frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r}, \quad s \in (0, 2\pi r)$$

Hai fatto i conti per una particolare circonferenza, in realtà, come ci aspetteremmno, tutto funziona bene per qualsiasi circonferenza in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata per lunghezza d'arco. Hai dunque dimostrato che *una circonferenza ha curvatura identicamente costante pari al reciproco del suo raggio r.* Con un teorema più figo e generale che dimostreremo più in là nella teoria si arriva ad affermare che, in realtà, *se una curva parametrizzata per lunghezza d'arco ha curvatura identicamente costante, allora è una circonferenza* (di raggio ovviamente pari al reciproco della curvatura). Ma lo vedremo più avanti...

Ora definiamo qualche bel vettorino (anzi, versorino) e qualche altro elemento utile ai nostri propositi...

- *Il vettore normale.* Nei punti ove hai che $k(s) \neq 0$, cioè curvatura diversa da zero, ha perfettamente senso definire un versore (ora capisci perché deve essere diverso da zero):

  $$\mathbf{n}(s) := \frac{\alpha''(s)}{k(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$$

  $\mathbf{n}(s)$ è detto *vettore normale.* Perché mai sarà "normale"? Il motivo è abbastanza ovvio! Si dimostra infatti che $\langle\alpha''(s), \alpha'(s)\rangle = 0 \ \forall\, s \in I$, che ovviamente equivale a $\langle\mathbf{n}(s), \alpha'(s)\rangle = 0 \ \forall\, s \in I$, il vettore normale è solo la normalizzazione di $\alpha''(s)$ d'altra parte. La dimostrazione fa molto semplicemente uso della derivazione di prodotti scalari[2]: siccome per ipotesi di parametrizzazione per lunghezza d'arco hai $|\alpha'(s)| \equiv 1$, puoi scrivere equivalentemente: $\langle\alpha'(s), \alpha'(s)\rangle \equiv 1$. Ora deriva pure a destra e a sinistra in s, e trovi:

  $$\big\langle\alpha''(s), \alpha'(s)\big\rangle + \big\langle\alpha'(s), \alpha''(s)\big\rangle \equiv 0$$

[2] La dimostrazione della formula generale di derivazione di prodotti scalari fa uso della chain rule e magari la piazzo in un'appendice.

che, per la simmetria e la positività del prodotto scalare (dai, proprietà elementari da non richiamare neppure!) equivale senza patemi a:

$$\big\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \big\rangle \equiv 0$$

che è quanto volevamo.

- *Il piano osculatore.* Sempre nelle solite ipotesi, avendo appena notato che $\alpha'(s) =: \mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ sono ortogonali (dimostrazione fatta sopra, ho solo dato un altro nome al vettore tangente, che qui è chiaramente un versore essendoci parametrizzazione per parametro d'arco!), a maggior ragione saranno *linearmente indipendenti* (ortogonalità $\Rightarrow$ indipendenza lineare, ovvio), quindi ha senso definire il *piano generato* da tali due vettori (e passante per i punti della curva stessa):

$$\pi(s) := \alpha(s) + \operatorname{span}\{\mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\}$$

Tale piano, definito ovviamente al variare del parametro s, è proprio il *piano osculatore* di α in s. È definito come piano passante per il generico punto immagine della curva parametrizzata (cioè il generico $\alpha(s) \in \mathbb{R}^3$) e generato dai due vettori tangente e normale, è quindi un *piano affine*; alcuni lo definiscono solo come il piano generato da quei due vettori ma passante per l'origine...

- *Il cerchio osculatore.* A volte può essere interessante approssimare la curva con un cerchio piuttosto che con la retta tangente o col piano osculatore. Data quindi $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata per lunghezza d'arco e tale che $k(s) \neq 0 \ \forall\, s \in I$ (ipotesi di curvatura non nulla, che bisognerà mettere anche in seguito per approfondire la teoria, come si vedrà), definiamo innanzitutto il *centro di curvatura*:

$$c(s) := \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$$

Da qui, si definisce il *cerchio osculatore di α in s* come *quel cerchio appartenente al piano osculatore di α in s, con centro $c(s)$ e raggio $R(s) := \dfrac{1}{k(s)}$* (detto *raggio di curvatura*).

- *Il vettore binormale.* Quando hai un piano, come nel nostro caso il piano osculatore, è più facile vederlo definito a partire dal suo vettore normale. A tale proposito, si definisce:

$$\mathbf{b}(s) := \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

detto appunto *vettore binormale.* Per le proprietà del prodotto vettoriale[3], $\mathbf{b}(s)$ è un versore, ed è ortogonale a $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$, di conseguenza

[3] Non ho voglia di parlarne in queste dispense, vedere a proposito direttamente il libro di testo.

è ovviamente ortogonale a $\text{span}\{\mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\}$, che è proprio la giacitura del piano osculatore! Dunque hai che il piano osculatore è proprio *quel piano passante per il punto* $\alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ *e con vettore normale* $\mathbf{b}(s)$, e quindi lo puoi calcolare (cioè, trovare *l'equazione cartesiana* esplicita!) senza patemi mediante la formuletta, nota a chiunque abbia fatto un minimo di geometria analitica dello spazio:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 - x(s) \\ x_2 - y(s) \\ x_3 - z(s) \end{pmatrix}, \mathbf{b}(s) \right\rangle = 0$$

ove x_1, x_2, x_3 sono le variabili dell'equazione cartesiana, e ovviamente $x(s), y(s), z(s)$ sono le tre componenti di $\alpha(s)$ nella base canonica (come al solito), e sempre al variare di $s \in I$, cioè l'intervallo in cui è definita la curva parametrizzata. Era ovvio che s variasse lì dentro, ma... viva la ridondanza!

Adesso *studiamo nel dettaglio il vettore binormale* e la sua derivata. Attenzione!

- $\mathbf{b}(s)$ *è ortogonale a* $\mathbf{b}'(s)$*!* Vediamo perché! Sappiamo intanto che $|\mathbf{b}(s)| = 1$ (è un versore) e quindi, equivalentemente: $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 1$, da cui, derivando il prodotto scalare in s a destra e a sinistra nella maniera già vista, si ottiene $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle + \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle = 0$, da cui per le elementari proprietà del prodotto scalare subito si conclude $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}'(s) \rangle = 0$, cioè l'ortogonalità voluta (sono andato un po' meno ridondante del solito perché sono cose già viste, dai).

- *Calcoliamo* $\mathbf{b}'(s)$ *e vediamone le proprietà geometriche!* Ricordando che per definizione $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, bisogna solo fare la derivata del prodotto vettoriale[4]. Viene:

  $$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s)$$

  Ma ora, ricordando le definizioni (ricordale! Ristudiale se non le ricordi, le ho già scritte!), hai che $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$, e si ha che $k(s)\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = 0$ (proprietà del prodotto vettoriale, si tratta di due vettori paralleli!). Di conseguenza, il primo dei due addendi dell'espressione sopra sparisce, e ti ritrovi che:

  $$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s)$$

  Adesso, attenzione! L'espressione appena ottenuta ci assicura che $\mathbf{b}'(s)$ è ortogonale a $\mathbf{t}(s)$. Ma ovviamente $\mathbf{t}(s)$ è ortogonale a $\mathbf{n}(s)$ (la dimostrazione è già stata fatta due pagine fa, ricordala!), quindi per

[4]Anche qui, si tratterà di usare la chain rule, ma non ho voglia di fare la dimostrazione qui e ora.

evidenti ragioni – "ortogonale all'ortogonale" unito al fatto che $\mathbf{b}'(s)$ è ortogonale a $\mathbf{b}(s)$ poiché $\mathbf{b}(s)$ ha norma 1 – hai che $\mathbf{b}'(s)$ è *parallelo* a $\mathbf{n}(s)$, proprietà che possiamo scrivere così:

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$$

per una certa funzione $\tau : I \to \mathbb{R}^3$ (ricorda, s è sempre arbitrario in tutti 'sti ragionamenti, quindi per forza hai sempre vettori che dipendono da lui!).

Ora finalmente possiamo dare una nuova importante definizione!

Definizione 1.5 (Torsione). *Data al solito $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco tale che $\alpha''(s) \neq 0 \ \forall\, s \in I$, definisci torsione di α in s lo scalare $\tau(s)$ che verifica $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$, ove s è sempre arbitrario appartenente a I, ovviamente.*

Notiamo subito che *la torsione si definisce solo se non è mai nulla $\alpha''(s)$, cioè equivalentemente se non è mai nulla la curvatura $k(s)$*; dunque non si dà la nozione di torsione per curve che risultino rettilinee anche solo a tratti, anche perché in quel caso non avresti buone definizioni (per esempio, non sarebbe possibile definire il vettore normale o il piano osculatore).

Qualcos'altro da dire...

- È opportuno fare alcune considerazioni, un po' formali e un po' intuitive, rispetto al significato geometrico della torsione. Intanto, notiamo una cosa interessante. Siccome $\mathbf{n}(s)$ è un versore e quindi $|\mathbf{n}(s)| = 1$, passando ai moduli nell'uguaglianza della definizione sopra, si ottiene $|\mathbf{b}'(s)| = |\tau(s)||\mathbf{n}(s)|$, da cui immediatamente $|\mathbf{b}'(s)| = |\tau(s)|$. Ora, ricordiamo come era definito il vettore binormale $\mathbf{b}(s)$: esso era proprio il vettore normale al piano osculatore (più precisamente alla sua giacitura, ma vabeh, diciamo pure così); quindi in un certo senso la sua derivata $\mathbf{b}'(s)$ ci dà *la velocità di cambiamento del piano osculatore* in un intorno di s (s, al solito, è arbitrario). Si è visto che $|\mathbf{b}'(s)| = |\tau(s)|$, quindi molto intuitivamente hai che, se la torsione è molto alta, la curva fa "molti movimenti" nelle tre dimensioni, e se viceversa è molto bassa la curva avrà piani osculatori che "cambiano poco", ecco.

- *Curve piane.* Come potremmo immaginarci, una curva parametrizzata $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è piana se la sua traccia $\alpha(I)$ è tutta contenuta in un piano (definendo ovviamente "piano" come "sottospazio affine di dimensione 2"). Diamo ora una caratterizzazione delle curve piane mediante torsione. Attenzione: mettiamoci nell'ipotesi preliminare che la torsione sia ben definita, cioè che $k(s) \neq 0 \ \forall\, s \in I$.

  Intanto, se α è piana, $\alpha(s) \in \pi_0 \ \forall\, s \in I$, per un certo piano (affine) $\pi_0 \subset \mathbb{R}^3$. Supponiamo dunque che $\pi_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :$

$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$ (insomma, abbia quell'equazione cartesiana). Ora, $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in \pi_0$, quindi ovviamente hai che $ax(s) + by(s) + cz(s) = d$ (cioè, soddisfa l'equazione cartesiana di π_0). Poi, attenzione, possiamo *derivare ambo i membri dell'espressione*, ottenendo senza patemi (faccio derivata prima e seconda):

$$\begin{aligned} ax'(s) + by'(s) + cz'(s) &= 0 \\ ax''(s) + by''(s) + cz''(s) &= 0 \end{aligned}$$

Cioè, in altre parole, $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ e $\alpha''(s)$ appartengono alla giacitura di π_0. Ovviamente anche $\mathbf{n}(s)$ appartiene a tale giacitura, basta dividere per $k(s)$ nella seconda equazione per vederlo immediatamente! Poi, ricorda che $\mathbf{t}(s)$ è ortogonale a $\mathbf{n}(s)$, quindi sono linearmente indipendenti; stando così le cose, si dimostra (algebra lineare...) che effettivamente *generano la giacitura di* π_0. Allora si ha che:

$$\pi_0 = \alpha(s) + \operatorname{span}\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\} \quad \forall\, s \in I$$

Dunque, $\pi_0 \equiv \pi(s)$, ove $\pi(s)$ è il piano osculatore di α nell'arbitrario $s \in I$ (ricorda la definizione!). Cioè, hai dimostrato che *se α è piana, il suo piano di appartenenza coincide in ogni punto col piano osculatore, che è quindi costante.* Se poi $\pi(s)$ è costante, ovviamente lo sarà anche il suo vettore normale, cioè il vettore binormale $\mathbf{b}(s)$. Dunque, $\mathbf{b}(s) \equiv \mathbf{b}_0$ per un certo $\mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^3$. Allora, facendo la derivata, ottieni che $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{0} = \tau(s)\mathbf{n}(s)$, che – siccome $\mathbf{n}(s) \neq \mathbf{0}$ giacché $k(s) \neq 0$ per ipotesi – implica immediatamente $\tau(s) = 0$, tutto questo per ogni $s \in I$.

Viceversa, supponiamo che $\tau(s) = 0\ \forall\, s \in I$. Allora, usando la definizione di τ, trovi che $\mathbf{b}'(s) = 0\mathbf{n}(s) = \mathbf{0}\ \forall\, s \in I$, da cui integrando (o, se vuoi, per il teorema della derivata nulla) trovi che $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0$ per un certo $\mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^3$. Ora, si ha che $\dfrac{d}{ds}\langle \alpha(s), \mathbf{b}_0\rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}_0\rangle + \langle \alpha(s), 0\rangle$. Nell'espressione appena ottenuta, il secondo addendo è ovviamente nullo, il primo anche ricordando che, per definizione, il vettore binormale $\mathbf{b}(s)$ (nel nostro caso costante e pari a $\mathbf{b}_0$) è ortogonale al vettore tangente $\mathbf{t}(s)$. Concludiamo che $\dfrac{d}{ds}\langle \alpha(s), \mathbf{b}_0\rangle = 0$. Integrando (o ancora, per il teorema della derivata nulla), trovi che $\langle \alpha(s), \mathbf{b}_0\rangle = d$ per una certa costante $d \in \mathbb{R}$. Ora abbiamo praticamente finito; per convincerci che $\alpha(s)$ appartiene effettivamente un piano, esplicitiamo quel prodotto scalare. Si trova immediatamente dal calcolo: $ax(s)+by(s)+cz(s) = d$, ove $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono le componenti di $\mathbf{b}_0$ e $x(s), y(s), z(s)$ quelle di $\alpha(s)$. Siccome s è fissato arbitrariamente in I, hai senza troppi patemi che $\alpha(I) \subseteq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$, che è proprio la rappresentazione cartesiana di un piano, in realtà addirittura del piano osculatore, ma non ci serve saperlo ai fini della dimostrazione, che è conclusa nei particolari, finalmente!

Triedro di Frenet e formule di Frenet Ora, visti tutti questi calcoli, l'idea è che possiamo considerare una *base mobile* (nel nostro caso dipendente da s, d'altra parte quel che ci interessa ora sono proprietà locali) del nostro spazio data da $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ (è effettivamente una base visto che si tratta di versori addirittura ortogonali a due a due). È utile perché ci permette di avere informazioni geometriche più dirette, come si vede anche facendo il calcolo delle derivate dei tre vettori. Si ha infatti che:

- $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$.
- Per le proprietà del prodotto vettore, giacché quei tre versori sono ortogonali, trovi che $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$. Ora, fai pure la derivata e ti ritrovi: $\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s)$. Ora, ricorda che $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$, quindi $\mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{t}(s) = -\tau(s)\mathbf{b}(s)$ (col meno, ricordando sempre le proprietà del prodotto vettoriale); nondimeno, $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ (l'ho scritto anche sopra), quindi $\mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s) = \mathbf{b}(s) \wedge k(s)\mathbf{n}(s) = -k(s)\mathbf{t}(s)$ sempre ricordando come funziona il prodotto vettoriale (regola della mano destra ...). Mettendo insieme, hai che
$$\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s) = -\tau(s)\mathbf{b}(s) - k(s)\mathbf{t}(s)$$
- Derivando $\mathbf{b}$ trovi, per un calcolo già fatto, $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$.

Mettendo insieme il tutto, avrai:

$$\begin{cases} \mathbf{t}' &= k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\tau\mathbf{b} - k\mathbf{t} \\ \mathbf{b}' &= \tau\mathbf{n} \end{cases}$$

Il parametro s è sottinteso per questioni estetiche, comunque è sempre pensato fissato arbitrario in I. Tali formule sono dette *formule di Frenet* e, per l'appunto, sono utili a modellizzare il comportamento locale della curva.

Appunti su curve con parametrizzazione generica Forti della teoria vista, e della possibilità di riparametrizzare ogni curva regolare ottenendo una parametrizzazione per lunghezza d'arco che conservi la traccia, è opportuno dare nozioni un filo più generali di curvatura e torsione, nonché formule di calcolo valide sempre. Fissa dunque una curva generica $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ con parametro t. Sia poi $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ una sua riparametrizzazione con parametro d'arco s, cioè – con la notazione già usata – tale che $\beta(s) = (\alpha \circ t)(s) = \alpha(t(s))$. Se $k_\beta(s)$ e $\tau_\beta(s)$ sono la curvatura e la torsione della riparametrizzazione β in s, definisci *la curvatura $k(t)$ di α in t* e *la torsione $\tau(t)$ di α in t* come $k(t) := (k_\beta \circ s)(t) = k_\beta(s(t))$ e $\tau(t) := (\tau_\beta \circ s)(t) = \tau_\beta(s(t))$. Al di là delle definizioni formali, date per far quadrare tutto per bene, la sostanza è che si definiscono curvatura e torsione di una curva regolari parametrizzate generica semplicemente come la curvatura e la torsione di una qualsiasi riparametrizzazione di tale curva per lunghezza d'arco (convinciamoci che si tratta di una definizione effettivamente indipendente dalla riparametrizzazione scelta). Veniamo ora alle formule.

- *Formula della curvatura.* Fissa pure una curva regolare α e una sua riparametrizzazione per lunghezza d'arco β, come detto sopra. Notiamo ora che $k_\beta = |\mathbf{t} \wedge k_\beta \mathbf{n}| = |\beta' \wedge \beta''|$. Ora, sapendo che $\beta(s) = \alpha(t(s))$, possiamo calcolare le derivate. Tenendo presente che $t'(s) = \dfrac{1}{|\alpha'(t(s))|}$ (conto già fatto), e che $t''(s) = -\dfrac{\langle \alpha'(t(s)), \alpha''(t(s)) \rangle}{|\alpha'(t(s))|^3}$ (derivare per credere, scrivendo al posto del modulo il prodotto scalare), si trova (sottintendo nei risultati la dipendenza dalle variabili per eleganza):

$$\begin{aligned}
\beta' &= \alpha'(t(s))t'(s) = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \\
\beta'' &= \alpha''(t(s))t'(s)t'(s) + \alpha'(t(s))t''(s) = \frac{|\alpha'|\alpha'' + \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'}{|\alpha'|^3}
\end{aligned}$$

  Ora valutiamo $\beta' \wedge \beta''$. Esplicitamente, e usando le proprietà del prodotto vettoriale, viene:

$$\begin{aligned}
\beta' \wedge \beta'' &= \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \wedge \frac{|\alpha'|\alpha'' + \langle \alpha', \alpha'' \rangle \alpha'}{|\alpha'|^3} \\
&= \frac{1}{|\alpha'|^3} \left(\alpha' \wedge \alpha''\right) + \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4} \left(\alpha' \wedge \alpha'\right) \\
&= \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{|\alpha'|^3}
\end{aligned}$$

  Ora, avremo finalmente che:

$$k_\beta = |\beta' \wedge \beta''| = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}$$

  Dunque, siccome per definizione la curvatura di α in t è $k(t) = k_\beta(s(t))$, si fa un po' di confusione con le notazioni rispetto a t e s ma si arriva a scrivere correttamente:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad t \in I$$

cioè la formula cercata, e operativamente utilizzabile con curve parametrizzate non necessariamente per lunghezza d'arco.

- *Formula della torsione.* Il procedimento è concettualmente identico, i calcoli sono diversi. Fissate come prima α e la riparametrizzazione β, mostriamo dapprima che $\tau_\beta = -\frac{\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle}{|\beta' \wedge \beta''|^2}$. Intanto, se $\beta'' = k_\beta \mathbf{n}$, allora $\beta''' = k_\beta{}' \mathbf{n} + k_\beta \mathbf{n}' \overset{\text{Frenet}}{=} k_\beta{}' \mathbf{n} - k_\beta^2 \mathbf{t} - k_\beta \tau_\beta \mathbf{b}$. Poi ricordiamo che $\beta' \wedge \beta'' = \mathbf{t} \wedge k_\beta \mathbf{n} = k_\beta \mathbf{b}$, e che ovviamente $|\beta' \wedge \beta''| = k_\beta$, come d'altra parte già osservato nel punto precedente. Allora possiamo scrivere, ricordando anche l'ortogonalità dei vettori in gioco:

$$\begin{aligned} -\frac{\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle}{|\beta' \wedge \beta''|^2} &= -\frac{\left\langle k_\beta \mathbf{b}, k_\beta{}' \mathbf{n} - k_\beta^2 \mathbf{t} - k_\beta \tau_\beta \mathbf{b} \right\rangle}{k_\beta{}^2} \\ &= -\frac{\langle k_\beta \mathbf{b}, -k_\beta \tau_\beta \mathbf{b} \rangle}{k_\beta{}^2} \\ &= \langle \mathbf{b}, \tau_\beta \mathbf{b} \rangle \\ &= \tau_\beta \end{aligned}$$

  Come volevamo. Ora, seguendo il procedimento del punto precedente, calcoliamo le derivate di β, sapendo che $\beta(s) = \alpha(t(s))$. Abbiamo già β' e β'', ci serve β''' (per ora mi risparmio i conti che sono un macello e la do per buona, tanto non ci sono altre grosse idee da mettere in campo).

- *Piano osculatore di una curva con parametrizzazione generica. Cenno.* Diamo solo un cenno a come è possibile definire anche il piano osculatore di una curva regolare con parametrizzazione qualunque α. Si possono fare considerazioni di tipo analitico per giustificare la seguente definizione di *vettore binormale "generalizzato"*:

$$\mathbf{b}(t) := \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}$$

  e quindi definire il piano osculatore di α in t come quel piano passante per $\alpha(t)$ e con vettore normale $\mathbf{b}(t)$. Notando come è definito $\mathbf{b}(t)$, possiamo anche affermare che la giacitura del piano osculatore è generata da $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$. In sintesi, si può scrivere:

$$\pi(t) = \alpha(t) + \operatorname{span}\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$$

A seguire, un teorema importante che, in fondo, dà senso a tutte le definizioni date finora.

Teorema 1.1 (fondamentale della teoria locale delle curve)**.** *Siano date due funzioni differenziabili $k : I \to \mathbb{R}^+$ e $\tau : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo aperto di $\mathbb{R}$). Allora esiste una curva parametrizzata per lunghezza d'arco (parametro s) $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tale che $k(s)$ sia la curvatura di α e $\tau(s)$ sia la torsione di α, per ogni $s \in I$. Tale curva è unica a meno di traslazioni e trasformazioni del gruppo ortogonale speciale $SO(3)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo per prima l'*unicità*. Intanto, si può dimostrare che la lunghezza d'arco, la torsione e la curvatura sono invarianti per trasformazioni rigide (cioè, traslazioni o mappe di $SO(3)$). Questo è intuitivo, perché tali valori sono in fin dei conti moduli di vettori, che non vengono certo intaccati da trasformazioni rigide. Soprassediamo sulla verifica rigorosa e concentriamoci sul resto del teorema. Supponiamo dunque di avere due curve α e $\widetilde{\alpha}$ che soddisfino le nostre ipotesi (definite su I, parametrizzazione per lunghezza d'arco s, stessa curvatura k e torsione τ). I vettori del triedro di Frenet "tildati" saranno quelli relativi a $\widetilde{\alpha}$, per coerenza di notazione. Ora, attenzione: se io fisso un punto $s_0 \in I$, ovviamente (convinciamoci!) riesco a trovare una trasformazione rigida tale che $\widetilde{\alpha}(s_0) \mapsto \alpha(s_0)$ e $\widetilde{\mathbf{t}}(s_0), \widetilde{\mathbf{n}}(s_0), \widetilde{\mathbf{b}}(s_0) \mapsto \mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)$ (rispettivamente). Applico dunque tale trasformazione, e senza badare troppo alla notazione (confondo $\widetilde{\alpha}$ e il suo triedro di Frenet con i loro trasformati) ottengo senz'altro che $\widetilde{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$, $\widetilde{\mathbf{t}}(s_0) = \mathbf{t}(s_0)$, $\widetilde{\mathbf{n}}(s_0) = \mathbf{n}(s_0)$ e $\widetilde{\mathbf{b}}(s_0) = \mathbf{b}(s_0)$. Adesso, io vorrei in realtà che la trasformazione trovata sia *buona per ogni* $s \in I$. Per vedere ciò, devo semplicemente controllare che le uguaglianze scritte sopra con s_0 siano vere per ogni $s \in I$. In realtà, vedremo che dimostrare le uguaglianze solo per i vettori del triedro di Frenet implica l'uguaglianza fra le due stesse curve. Attenzione ora, perché il metodo usato è abbastanza standard e funziona benino. L'idea è di valutare la seguente quantità:

$$\frac{d}{ds}\left(\left|\mathbf{t}(s) - \widetilde{\mathbf{t}}(s)\right|^2 + |\mathbf{n}(s) - \widetilde{\mathbf{n}}(s)|^2 + \left|\mathbf{b}(s) - \widetilde{\mathbf{b}}(s)\right|^2\right), \quad s \in I$$

Svolgendo il calcolo mediante le formule di Frenet di α e $\widetilde{\alpha}$ e utilizzando le ipotesi (stessa curvatura, stessa torsione per le due curve) si dimostrerà che quella derivata è pari a zero. Dunque, per il teorema della derivata nulla, l'espressione "derivanda" sarà costante. E siccome sarà costante, conoscere il suo valore in un punto dell'intervallo di definizione I (che guarda caso sarà s_0) ci permetterà di concludere che su tutto I assume esattamente il valore che assume in quel punto specifico. Operativamente non c'è molto da fare se non fare il conto nella maniera già specificata sopra. Quei moduli al quadrato li scrivi come prodotti scalari e derivi con la solita regola. Nella scrittura del calcolo, sottintendo la dipendenza da s per comodità.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds}\left(\left|\mathbf{t}(s)-\widetilde{\mathbf{t}}(s)\right|^2+|\mathbf{n}(s)-\widetilde{\mathbf{n}}(s)|^2+\left|\mathbf{b}(s)-\widetilde{\mathbf{b}}(s)\right|^2\right)\\
= \quad & 2\left(\left\langle \mathbf{t}-\widetilde{\mathbf{t}},\mathbf{t}'-\widetilde{\mathbf{t}}'\right\rangle+\left\langle \mathbf{b}-\widetilde{\mathbf{b}},\mathbf{b}'-\widetilde{\mathbf{b}}'\right\rangle+\left\langle \mathbf{n}-\widetilde{\mathbf{n}},\mathbf{n}'-\widetilde{\mathbf{n}}'\right\rangle\right)\\
\overset{\text{Frenet}}{=} \quad & 2\left(k\left\langle \mathbf{t}-\widetilde{\mathbf{t}},\mathbf{n}-\widetilde{\mathbf{n}}\right\rangle+\tau\left\langle \mathbf{b}-\widetilde{\mathbf{b}},\mathbf{n}-\widetilde{\mathbf{n}}\right\rangle-k\left\langle \mathbf{n}-\widetilde{\mathbf{n}},\mathbf{t}-\widetilde{\mathbf{t}}\right\rangle\right.\\
& \left.-\,\tau\left\langle \mathbf{n}-\widetilde{\mathbf{n}},\mathbf{b}-\widetilde{\mathbf{b}}\right\rangle\right)\\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

Proprio come ci aspettavamo. Per il teorema della derivata nulla, l'espressione $\left(\left|\mathbf{t}(s)-\widetilde{\mathbf{t}}(s)\right|^2+|\mathbf{n}(s)-\widetilde{\mathbf{n}}(s)|^2+\left|\mathbf{b}(s)-\widetilde{\mathbf{b}}(s)\right|^2\right)$ è costante. Per $s=s_0$, grazie alle ipotesi, quell'espressione è uguale a 0. Ma siccome è costante, significa che è uguale a 0 per ogni s, cioè:

$$\left|\mathbf{t}(s)-\widetilde{\mathbf{t}}(s)\right|^2+|\mathbf{n}(s)-\widetilde{\mathbf{n}}(s)|^2+\left|\mathbf{b}(s)-\widetilde{\mathbf{b}}(s)\right|^2=0,\quad \forall\, s\in I$$

che implica ovviamente, per ogni s, $\mathbf{t}(s)=\widetilde{\mathbf{t}}(s),\mathbf{n}(s)=\widetilde{\mathbf{n}}(s),\mathbf{b}(s)=\widetilde{\mathbf{b}}(s)$, cioè l'uguaglianza dei due triedri di Frenet. A questo punto notiamo che, ricordando la definizione del vettore tangente, $\alpha'(s)=\mathbf{t}(s)\overset{!!}{=}\widetilde{\mathbf{t}}(s)=\widetilde{\alpha}'(s)$, che implica ovviamente $\frac{d}{ds}(\alpha(s)-\widetilde{\alpha}(s))=0$, da cui ancora per il teorema della derivata nulla (o, se vuoi, integrando) quell'espressione è costante. Ma ora ricordiamo che avevamo supposto che $\alpha(s_0)=\widetilde{\alpha}(s_0)$, quindi in s_0 quell'espressione è uguale a $\mathbf{0}$. Ma essendo costante per ogni $s\in I$, dovrà essere uguale a $\mathbf{0}$ per ogni $s\in I$. In altre parole, $\alpha(s)\equiv\widetilde{\alpha}(s)$, proprio ciò che volevamo.

Vediamo ora l'*esistenza*. È una dimostrazione costruttiva che fa uso di risultati sulle equazioni differenziali ordinarie, quindi ha un'anima più analitica, per così dire. Ci sarà un bel casino di notazioni, vedrò di scrivere il meno possibile cercando di essere (almeno a me stesso) chiaro. L'idea principale è notare che le formule di Frenet

$$\begin{cases}
\mathbf{t}' &= k\mathbf{n}\\
\mathbf{n}' &= -\tau\mathbf{b}-k\mathbf{t}\\
\mathbf{b}' &= \tau\mathbf{n}
\end{cases}$$

possono essere viste come un *sistema di equazioni differenziali lineari*. L'idea è proprio di partire da lì, da quel sistema che fa intervenire le date k e τ, e pensare di *definire mediante tale sistema quelle tre funzioni*, che si mostrerà formeranno un buon triedro di Frenet, con le opportune condizioni iniziali anch'esse opportunamente definite. Pensando poi di scomporre le tre funzioni vettoriali $\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}$ nelle loro componenti, ti ritrovi un sistema lineare di ben nove equazioni scalari, cioè:

$$\frac{d\xi_i}{ds}=f_i(s,\xi_1(s),\ldots,\xi_9(s)),\quad i=1,\ldots,9,\quad s\in I$$

ove I è l'intervallo aperto dato dalle ipotesi del teorema, e abbiamo posto $\mathbf{t} =: (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mathbf{n} =: (\xi_4, \xi_5, \xi_6), \mathbf{b} =: (\xi_7, \xi_8, \xi_9)$. Usando il famoso teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy per sistemi lineari (dato iniziale all'istante s_0), possiamo affermare che il sistema ammette un'unica soluzione definita su tutto I. Ora, l'idea è di partire con un dato iniziale all'istante s_0 che sia un triedro ortonormale e orientato positivamente di $\mathbb{R}^3$, e poi controllare che, con quel dato iniziale, la soluzione per ogni $s \in I$ (unica) del sistema di equazioni differenziali è ancora un triedro ortonormale. Ciò ci permetterà successivamente di definire (costruttivamente quindi!) la curva cercata. Più operativamente: fissa pure un triedro ortonormale $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ e un istante $s_0 \in I$. Per il teorema di esistenza e unicità citato, esiste (unica) la soluzione al problema con quei valori iniziali, e ciò corrisponde naturalmente all'esistenza (e unicità) di un triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ tale che $\mathbf{t}(s_0) = \mathbf{t}_0, \mathbf{n}(s_0) = \mathbf{n}_0, \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}_0$. Ora, per procedere, bisogna controllare che quel triedro ottenuto sia ortonormale per ogni $s \in I$. Ciò si traduce nel controllo manuale di ciascuna delle seguenti quantità:

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle, \quad \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle, \quad \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle, \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle, \quad \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

ove la dipendenza da s nelle espressioni è sottintesa per eleganza estetica. Attenzione ora, perché anche questo controllo manuale vien fatto mediante una tecnica standard e utile da memorizzare per utilizzi futuri. L'idea è derivare in s ciascuno dei sei prodotti scalari scritti sopra, ottenendo un sistema di equazioni differenziali; a questo punto, trovare la soluzione del problema ai valori iniziali dati (il triedro ortonormale fissato prima) e concludere che è unica, usando ovviamente il solito teorema di esistenza e unicità. Nel calcolo che segue sono ovviamente usate anche le formule di Frenet che, non dimentichiamo, costutuivano proprio il punto di partenza del nostro procedimento. Viene:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle & = & k \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle - k \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle - \tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle & = & k \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle + \tau \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle & = & -k \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle - \tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + \tau \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle & = & 2k \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle & = & -2k \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle - 2\tau \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle & = & 2\tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \end{cases}$$

Notiamo ora che si tratta di un sistema di equazioni differenziali lineare nei sei prodotti scalari. Le condizioni iniziali all'istante s_0 già date, cioè che $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ è un triedro ortonormale, comportano naturalmente che vi siano già condizioni iniziali anche per quest'ultimo sistema, ovviamente sempre nell'istante s_0. Esse sono, rispettando l'ordine con cui ho presentato i sei prodotti scalari: $0, 0, 0, 1, 1, 1$. Con tali dati iniziali, si verifica senza troppi patemi che il sistema è risolto proprio da:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle & \equiv & 0 \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle & \equiv & 0 \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle & \equiv & 0 \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle & \equiv & 1 \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle & \equiv & 1 \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle & \equiv & 1 \end{cases}$$

Tale soluzione è unica per il solito teorema di esistenza e unicità già citato più volte, quindi possiamo concludere che effettivamente il triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ è ortonormale per ogni $s \in I$. A voler essere prolissi, possiamo riassumere anche così il procedimento svolto: il teorema di esistenza-unicità applicato al primo sistema comparso ci assicura che *esiste unico e definito in I il triedro cercato*; applicato a questo altro sistema appena risolto, ci assicura che quell'unico triedro trovato *è sempre ortonormale in I*, fissate ovviamente le opportune condizioni iniziali. È un interessante metodo analitico nella forma ma con importanti conseguenze geometriche. Ora abbiamo quasi finito. Costruito il nostro triedro ortonormale, possiamo finalmente definire la curva che volevamo costruire:

$$\alpha(s) := \int_{s_0}^{s} \mathbf{t}(\xi)\, d\xi$$

Ora ci basta verificare che è proprio una curva parametrizzata per lunghezza d'arco, e che le date k e τ sono effettivamente la sua curvatura e torsione. Intanto, hai subito che $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$, ed essendo $\mathbf{t}$ un versore per ogni s, hai che $|\alpha'(s)| \equiv 1$, cioè s è proprio il parametro d'arco. Derivando ancora e usando l'ipotesi costruttiva fatta all'inizio del procedimento, si trova che $\alpha''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$, da cui $k(s) = |\alpha''(s)|$ per ogni s, cioè $k(s)$ è effettivamente la curvatura di α in s. Per quanto riguarda il calcolo della torsione di α, utilizziamo la seguente formula, valida per qualsiasi curva:

$$-\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{k^2} = -\frac{\big\langle \mathbf{t} \wedge k\mathbf{n}, (-k^2\mathbf{t} + k'\mathbf{n} - k\tau\mathbf{b}) \big\rangle}{k^2} = \tau$$

Il calcolo svolto sopra ci mostra che α ha proprio τ come torsione, e possiamo quindi concludere che soddisfa le proprietà richieste dal teorema. Abbiamo veramente finito. Notiamo (in realtà, ripetiamo) a titolo esplicativo che se non avessimo controllato a priori l'ortonormalità del triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ avremmo potuto avere incongruenze tra la definizione di curva appena data e il sistema delle formule di Frenet assunto per ipotesi, cosa che per fortuna non succede! $\square$

È un teorema importante perché afferma in sostanza che, data curvatura e torsione, hai già definita una particolare (unica) tipologia di curva parametrizzata per lunghezza d'arco.

- *Curvatura della circonferenza (II).* In un precedente esempio avevamo considerato la circonferenza di raggio r appartenente al piano $\{z = 0\}$ (quindi, torsione identicamente nulla) e avevamo mostrato che $k(s) = \frac{1}{r}\ \forall s$. Come conseguenza diretta del teorema appena dimostrato, possiamo ora affermare che *tutte le curve piane con curvatura costante sono circonferenze.*

2 Teoremi dell'inversa, del rango, del Dini

Una parte di geometria differenziale più "astratta", se vogliamo. Un accorgimento: l'uso delle lettere m e n ad indicare la dimensione degli spazi euclidei in gioco è scambiata rispetto al solito, ciò può creare sul momento un po' di confusione, ma in realtà tutto torna.

Definizione 2.1 (Diffeomorfismo)**.** *Dati $U \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ due aperti, un'applicazione $f : U \to V$ è un diffeomorfismo se è differenziabile con l'inversa differenziabile.*

Enunciamo ora, senza dimostrazione, il Teorema della funzione inversa.

Teorema 2.1 (della funzione inversa)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile; esista poi $p \in U$ tale che $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia biunivoco (rango massimo). Allora esiste $W \subseteq U$ aperto con $p \in W$ tale che $f_{|W} : W \to f(W)$ è un diffeomorfismo.*

Si tratta di un teorema che afferma l'esistenza di un diffeomorfismo ottenuto come restrizione di f in intorni aperti di punti dove il differenziale della funzione data sia "bello", abbia cioè rango massimo. L'esistenza di tale diffeomorfismo locale dà naturalmente l'esistenza di una funzione inversa locale che è pure differenziabile. Il Teorema dell'inversa ci permette di mostrare altri risultati piuttosto forti, come vedremo di seguito.

Teorema 2.2 (del rango, versione suriettiva)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenziabile ($m \geq n$); esista poi $p \in U$ tale che $df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sia suriettivo (rango massimo e pari a n). Allora esistono $W \subseteq U$ aperto con $p \in W$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto e un diffeomorfismo $\varphi : V \to W$ tale che $(f \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$.*

Dimostrazione. $(x_1, \ldots, x_m) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ sia la generica variabile di f. Per comodità, poni $f(x_1, \ldots, x_m) = (y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m))$. Ora, consideriamo il differenziale df_p rappresentato da

$$Jf_p = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\{i,j:1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}}$$

che è una matrice $n \times m$, per ipotesi di rango n. Ora, a meno di permutare le coordinate (convinciamoci che tale operazione non crea problemi o perdite di generalità), possiamo supporre che il minore di ordine n $A := \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\{i,j:1 \leq i,j \leq n\}}$ sia una matrice invertibile, quindi $\det A \neq 0$. Ora, attenzione: definisco una funzione ausiliaria $\rho : U \to \mathbb{R}^m$ mediante $\rho(x_1, \ldots, x_m) := (f(x_1, \ldots, x_m), x_{n+1}, \ldots, x_m)$, cioè che agisca come f sulle prime n componenti, e che tenga ferme le restanti. Ora ci occupiamo di $d\rho_p$. Facendo il conto – non è difficile – esce che:

$$J\rho_p = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & I_{m-n} \end{pmatrix}$$

ove $B := \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\{i,j:1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq m\}}$ è una certa sottomatrice. In ogni caso B non influisce nel nostro procedimento, visto che possiamo già affermare che $\det J\rho_p = \det A \neq 0$. Siamo ora nelle ipotesi giuste per poter applicare il Teorema della funzione inversa. Dunque esiste $W \subseteq U$ intorno aperto di p tale che $\rho_{|W} : W \to \rho(W)$ è un diffeomorfismo. Essendo diffeomorfismo, è un'applicazione aperta, quindi $\rho(W) =: V$ è aperto in $\mathbb{R}^m$. Possiamo ora definire la φ cercata, che sarà $\varphi := \rho^{-1}$ (sottintendo il fatto ovvio che considero l'inversa della restrizione di ρ a W). Vediamo ora che tutto funziona. Per prima cosa – attenzione! – introduciamo la proiezione $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\pi(\xi_1, \ldots, \xi_m) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Ora, notiamo con interesse che, addirittura in generale, $f(x_1, \ldots, x_m) = (\pi \circ \rho)(x_1, \ldots, x_m)$; infatti $\pi(\rho(x_1, \ldots, x_m)) = \pi(f(x_1, \ldots, x_m), x_{n+1}, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m)$. Ora, per finire, operiamo direttamente, usando ciò che abbiamo trovato or ora. Fissati $(z_1, \ldots, z_m) \in V$ (ricordiamo che è un risultato locale, e che φ è definita localmente), troviamo:

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)(z_1, \ldots, z_m) &= (\pi \circ \rho \circ \varphi)(z_1, \ldots, z_m) \\ &\overset{\varphi=\rho^{-1}}{=} \pi(z_1, \ldots, z_m) \\ &= (z_1, \ldots, z_n) \end{aligned}$$

Come volevamo. □

L'idea è che, data una funzione a valori in uno spazio di dimensione uguale o inferiore di quello in cui è definita, si può trovare per intorni aperti corrispondenti a punti con differenziale "bello" (in questo caso suriettivo) un diffeomorfismo che, applicato prima di f, mi "deforma localmente" lo spazio in modo che la composizione che ne risulta sia, sempre localmente, una proiezione. Esiste anche la versione iniettiva del teorema del rango, che enunciamo e dimostriamo di seguito.

Teorema 2.3 (del rango, versione iniettiva)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenziabile ($m \leq n$); esista poi $p \in U$ tale che $df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*

sia iniettivo (rango massimo e pari a m). Allora esistono $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto con $f(p) \in W$, $V \subseteq U \times \mathbb{R}^{n-m}$ aperto e un diffeomorfismo $\varphi : W \to V$ tale che $(\varphi \circ f) : f^{-1}(W) \to V$ e $(\varphi \circ f)(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m})$.

Dimostrazione. La parte iniziale della dimostrazione è sostanzialmente identica a quella della versione suriettiva, la riporto anche qui per completezza. $(x_1, \dots, x_m) \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ sia la generica variabile di f. Per comodità, poni $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m))$. Ora, consideriamo il differenziale df_p rappresentato da

$$Jf_p = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\{i,j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}}$$

che è una matrice $n \times m$, per ipotesi di rango m. Ora, a meno di permutare le coordinate (convinciamoci che tale operazione non crea problemi o perdite di generalità), possiamo supporre che il minore di ordine m $A := \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \right)_{\{i,j : 1 \leq i,j \leq m\}}$ sia una matrice invertibile, quindi $\det A \neq 0$. Ora, similmente a prima, definiamo una funzione ausiliaria in modo furbo per poter poi applicare il Teorema dell'inversa. Definiamo quindi $\rho : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ mediante $\rho(x_1, \dots, x_n) := (y_1, \dots, y_m, (y_{m+1} + x_{m+1}), \dots, (y_n + x_n))$, ove per eleganza estetica ho sottinteso le variabili delle componenti y_i di f. Come anche nella versione del teorema dimostrata precedentemente, l'idea della definizione di ρ è quella di "estendere" la f in modo da ottenere una funzione tra spazi euclidei di uguale dimensione. Adesso bisogna valutare il differenziale di ρ. Un problema formale che si pone è: in che punto, per far tornare il procedimento? Conoscendo per ipotesi il punto $p \in \mathbb{R}^m$ ove il differenziale di f è iniettivo, l'idea giusta (e anche più naturale) per far tornare tutto è valutare $d\rho$ in $\widetilde{p} := (p, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}) \in \mathbb{R}^n$, che è in sostanza l'immagine di p secondo l'omomorfismo canonico di inclusione $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Calcolando le derivate parziali (stavolta metto per chiarezza il conto esplicito):

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j}(\widetilde{p}) = \begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p), & 1 \leq i,j \leq m \\ 0, & 1 \leq i \leq m,\ m+1 \leq j \leq n \\ 1, & m+1 \leq i,j \leq n,\ i = j \\ 0, & m+1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j \end{cases}$$

Forse non è così immediato che $\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j}(\widetilde{p}) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)$ se $1 \leq i,j \leq m$, ma discende dal fatto che $\rho_i(x_1, \dots, x_n) = y_i(x_1, \dots, x_m)$ (per gli stessi i, j) e dalla definizione di $\widetilde{p}$. Finalmente possiamo scrivere la matrice jacobiana di ρ in $\widetilde{p}$, tenendo presente i calcoli fatti or ora:

$$J\rho_{\widetilde{p}} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

ove $B := \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j}(\widetilde{p})\right)_{\{i,j: m+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}}$ è una certa sottomatrice che comunque non influisce nel nostro procedimento. Infatti siccome abbiamo già che $\det A \neq 0$, sicuramente $\det J\rho_{\widetilde{p}} \neq 0$, e siamo nelle ipotesi giuste per applicare anche qui il Teorema della funzione inversa. Dunque esiste $V \subseteq U \times \mathbb{R}^{n-m}$ intorno aperto di $\widetilde{p}$ tale che $\rho_{|V} : V \to \rho(V)$ è un diffeomorfismo. Dunque $\rho(V) =: W$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, e si vede peraltro senza troppi patemi (provare per credere), che $\rho(\widetilde{p}) = f(p) \in W$ (proprio come afferma parte della tesi). Ora possiamo definire il diffeomorfismo cercato φ come $\varphi := \rho^{-1}$ (l'ho sottinteso, ma ovviamente intendo l'inversa della restrizione di ρ a V). Per finire, va controllata l'uguaglianza che costituisce l'ultima parte della tesi. A tale proposito, fissiamo $(z_1, \ldots, z_m) \in f^{-1}(W)$. Banalmente $f(z_1, \ldots, z_m) \in W$; nondimeno, è pressoché immediato, usando la definizione stessa di ρ, notare che $f(z_1, \ldots, z_m) = \rho(z_1, \ldots, z_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})$. Quella quantità appartiene a W, dunque ha senso applicare φ. Quell'uguaglianza diventerà:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ f)(z_1, \ldots, z_m) &= (\varphi \circ \rho)(z_1, \ldots, z_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m}) \\ &\overset{\varphi=\rho^{-1}}{=} (z_1, \ldots, z_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})\end{aligned}$$

Come volevamo. □

L'idea qui è quasi speculare alla versione suriettiva del teorema. Si applica prima f localmente, restringendosi alla controimmagine dell'aperto (contenente $f(p)$) ove è definito φ; poi l'applicazione del diffeomorfismo φ "deforma localmente" lo spazio di arrivo in modo che la composizione che ne risulta sia, sempre localmente, un'immersione. Ora, dimostrate e commentate le due versioni del Teorema del rango, siamo pronti a dimostrare il famoso Teorema del Dini, o della funzione implicita.

Teorema 2.4 (del Dini, o della funzione implicita)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ $(m \geq n)$ un intorno aperto di $(0,0)$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ differenziabile tale che $F(0,0) = 0$ e $dF_{(0,0)}$ sia suriettivo. Allora $F^{-1}(0)$ (controimmagine di $0 \in \mathbb{R}^n$) è localmente (cioè, limitatamente a un intorno aperto di $(0,0)$) il grafico di una funzione differenziabile.*

Dimostrazione. Attenzione al procedimento. Applichiamo la versione suriettiva del Teorema del rango rispetto al punto $(0,0) \in F^{-1}(0)$. Dunque, troviamo un intorno aperto di $(0,0)$, $W' \times W'' \subseteq U$, un aperto $V' \times V'' \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ e un diffeomorfismo $\varphi : V' \times V'' \to W' \times W''$ tale che $(F \circ \varphi)(v', v'') = v'$. A questo punto va notato che $(0,0) \in V' \times V''$ grazie alla definizione di $\varphi = \rho^{-1}$ nelle notazioni del Teorema del rango (ricontrollare per credere). Ora, occupiamoci di $(F \circ \varphi)^{-1}(0)$ (controimmagine di 0 secondo quella funzione). Come appena scritto, per il Teorema del rango vale

$(F \circ \varphi)(v', v'') = v'$, e si verifica subito che $(F \circ \varphi)(v', v'') = 0 \Leftrightarrow v' = 0$ (tale valore per v' è ammissibile, abbiamo infatti controllato che $(0, 0) \in V' \times V''$). Dunque si ha che $(F \circ \varphi)^{-1}(0) = \{(0, v'') : v'' \in V''\}$. Ora, ricordiamo che $\varphi = \rho^{-1}$, ove in questo caso $\rho(w', w'') = (F(w', w''), w'')$. Dunque, possiamo scrivere la sua inversa φ come $\varphi(v', v'') = (G(v', v''), v'')$ ove $G : V' \times V'' \to W'$ è una certa funzione differenziabile. Adesso calcoliamo $\varphi\Big((F \circ \varphi)^{-1}(0)\Big) = \varphi\left(\{(0, v'') : v'' \in V''\}\right)$. Per banali fatti insiemistici, esso coincide con $\{\varphi(0, v'') : v'' \in V''\} = \{(G(0, v''), v'') : v'' \in V''\}$. Ora, possiamo senz'altro definire una funzione $g : V'' \to W'$ come $g(v'') := G(0, v'')$, e affermare che effettivamente $\varphi\Big((F \circ \varphi)^{-1}(0)\Big) = \{(g(v''), v'') : v'' \in V''\}$ è il grafico di una funzione differenziabile (g lo è senz'altro). La cosa interessante e importante da vedere, ora, è che questo insieme appena costruito e descritto coincide con $F^{-1}(0) \cap (W' \times W'')$, che è il risultato locale che ci interessa. Per mostrarlo, verifichiamo le due inclusioni. Per la prima, fissiamo $(x, y) \in F^{-1}(0) \cap (W' \times W'')$, quindi $F(x, y) = 0$. Vogliamo che appartenga a $\varphi\left(\{(0, v'') : v'' \in V''\}\right)$, cioè vogliamo che esista un certo $v''_* \in V''$ tale che $(x, y) = \varphi(0, v''_*)$. Ma notiamo ora che ovviamente $(x, y) \in W' \times W''$, e $\varphi : V' \times V'' \to W' \times W''$ è biunivoca essendo diffeomorfismo, quindi esiste $(v'_*, v''_*) \in V' \times V''$ tale che $(x, y) = \varphi(v'_*, v''_*)$. A questo punto voglio che $v'_* = 0$. Per vederlo, applichiamo F a destra e a sinistra, ottenendo $0 \overset{(x,y)\in F^{-1}(0)}{=} F(x, y) = (F \circ \varphi)(v'_*, v''_*) \overset{\text{Th. rango}}{=} v'_*$, come volevamo. Dunque $(x, y) = \varphi(0, v''_*)$, cioè $(x, y) \in \varphi\left(\{(0, v'') : v'' \in V''\}\right)$, da cui la prima inclusione voluta. Per quanto riguarda la seconda, fissiamo $(t, z) \in \varphi\left(\{(0, v'') : v'' \in V''\}\right)$, da cui per la definizione di insieme immagine troviamo un certo $u \in V''$ tale che $(t, z) = \varphi(0, u) \in W' \times W''$. A questo punto, applichiamo F ad ambo i membri, e otteniamo $F(t, z) = (F \circ \varphi)(0, u) \overset{\text{Th. rango}}{=} 0$; alla fine abbiamo che $(t, z) \in F^{-1}(0) \cap W' \times W''$. Riassumendo e ricordando la descrizione esplicita di $\varphi\left(\{(0, v'') : v'' \in V''\}\right)$, abbiamo infine ottenuto l'uguaglianza tra insiemi:

$$F^{-1}(0) \cap (W' \times W'') = \{(g(v''), v'') : v'' \in V''\}$$

Cioè, $F^{-1}(0) \cap (W' \times W'')$ è il grafico di una funzione differenziabile, in altre parole $F^{-1}(0)$ è localmente il grafico di una funzione differenziabile $g : V'' \to W'$, e $W' \times W''$ è un intorno aperto di $(0, 0)$, come volevamo. $\square$

Tre cose da notare a margine della dimostrazione...

- L'enunciato e la dimostrazione sono stati dati per il punto $(0, 0)$, ma ovviamente valgono per un punto $q = (q', q'')$ generico nel dominio di F, con le opportune modifiche alle ipotesi. Nondimeno il teorema vale ancora, sempre con le opportune modifiche alle ipotesi, nel caso si consideri la controimmagine di un elemento arbitrario. Ci si può ricondurre al caso "centrato in zero" con l'introduzione di opportune funzioni ausiliarie che risulteranno in sostanza l'applicazione di traslazioni.

- A patto di supporre che dF_q sia suriettivo per ogni $q \in F^{-1}(0)$ (supposizione che in certe condizioni sarà possibile fare), si può pensare di applicare il Teorema del Dini rispetto a ogni q. La cosa interessante è che si troveranno grafici locali di *funzioni definite dalla stessa formula*, questo perché tale formula dipende solo dalla formula di φ, che a sua volta dipende solo dalla formula di ρ, che dipende solo dalla formula della F data.

- L'aperto $V'' \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$ ottenuto è effettivamente un intorno aperto di $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Lo si vede facilmente, ricordando la funzione $\rho(w', w'') = (F(w', w''), w'')$ definita in $W' \times W''$ e a valori in $V' \times V''$. Siccome $(0, 0) \in W' \times W''$, puoi scrivere $\rho(0, 0) = (F(0, 0), 0) = (0, 0) \in V' \times V''$, da cui ottieni senz'altro che $0 \in V''$. A voler vedere, V'' coinciderebbe addirittura con W'' giacché nella definizione di ρ le coordinate relative a W'' vengono lasciate ferme.

Ciò detto, passiamo a una proposizione che conduce ad un risultato simile a quello appena ottenuto.

Proposizione 2.5. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un intorno aperto di 0, $f : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ $(m \leq n)$ una funzione differenziabile tale che $f(0) = (0, 0)$ e df_0 sia iniettivo. Allora* $\operatorname{Im} f$ *(immagine di f) è localmente il grafico di una funzione differenziabile.*

Dimostrazione. L'idea per cominciare è quella di considerare la funzione composta $(\pi \circ f) : U \to \mathbb{R}^m$, ove $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ è la solita proiezione. Valutando il differenziale della funzione composta in 0, si ha per la chain rule: $d(\pi \circ f)_0 = d\pi_{f(0)} \circ df_0$. A meno di un cambio di coordinate (come al solito, convinciamoci che non perdiamo in generalità), possiamo supporre grazie all'iniettività di df_0 che la jacobiana di f in 0 – che ha quindi rango massimo – sia della forma $Jf_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, ove A è una matrice invertibile e B è una certa sottomatrice. Poi, si trova con un semplice calcolo che $J\pi_{f(0)} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. A questo punto si può calcolare in modo immediato $J(\pi \circ f)_0 = J\pi_{f(0)} \cdot Jf_0 = A$. Dunque $J(\pi \circ f)_0$ è una matrice invertibile, quindi il differenziale $d(\pi \circ f)_0$ è biunivoco. A questo punto possiamo applicare il Teorema dell'inversa a $\pi \circ f$ rispetto al punto 0. Dunque esiste $W \subseteq U$ intorno aperto di 0 tale che (notazione ridondante) $\pi \circ f : W \to V$ (con $V := (\pi \circ f)(W)$) è un diffeomorfismo. Notiamo incidentalmente che, siccome per ipotesi $f(0) = (0, 0)$ e siccome $0 \in W$, possiamo scrivere $(\pi \circ f)(0) = \pi(0, 0) = 0 \in V$, dunque anche V è un intorno aperto di 0. Ora entriamo nel vivo della dimostrazione, quindi attenzione! L'idea chiave ora è quella di prendere un elemento $(u, v) \in f(W)$ (notare che ci stiamo conducendo proprio verso un risultato di natura locale), rassicurati dal fatto che, siccome $\pi \circ f$ è biunivoca, per un semplice risultato di insiemistica $f : W \to f(W)$ è sicuramente biunivoca[5]. Dunque, per definizione di insieme immagine, esiste $w \in W$ tale che $(u, v) = f(w)$. Ora, facciamo attenzione al procedimento che è un filo truccoso. Applichiamo π a destra e a sinistra, trovando $\pi(u, v) = u = (\pi \circ f)(w) \in V$. Notiamo che, dal momento che $\pi \circ f : W \to V$ è diffeomorfismo, possiamo invertire ricavando $w = (\pi \circ f)^{-1}(u)$. Ora applichiamo f a destra e a sinistra, e troviamo $f(w) = (f \circ (\pi \circ f)^{-1})(u) \in f(W)$. Per comodità poniamo $g := f \circ (\pi \circ f)^{-1}$, notando che $g : V \to f(W)$ e che è ovviamente differenziabile. Ora, con la solita convenzione che $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, scriviamo $g(\cdot) = (g_1(\cdot), g_2(\cdot))$. Si avrà dunque $f(w) = (g_1(u), g_2(u))$. Ora, attenzione! Possiamo applicare a destra e a sinistra π, ottenendo $u = (\pi \circ f)(w) = g_1(u)$ (ricordare i passaggi precedenti, e la definizione della proiezione π). Mettendo insieme, si avrà dunque che $f(w) = (u, g_2(u))$. Notiamo ora che $f(w) = (u, g_2(u)) \in \{(z, g_2(z)) : z \in V\}$. Ricordiamo che $f(w)$ era fissato arbitrario in $f(W)$, da cui possiamo affermare che $f(W) \subseteq \{(z, g_2(z)) : z \in V\}$. Verifichiamo ora l'inclusione opposta. Fissiamo un elemento $(u, g_2(u)) \in \{(z, g_2(z)) : z \in V\}$. Siccome $u \in V$, ricordando la definizione del diffeomorfismo $\pi \circ f$, possiamo scrivere $u = (\pi \circ f)(w)$ per un certo $w \in W$. Ora, scriviamo $f(W) =: f(W)' \times f(W)'' \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, e possiamo senz'altro affermare che $u = (\pi \circ f)(w) \in f(W)'$. D'altra parte, avremo senza troppi patemi che $g_2 : V \to f(W)''$, quindi $g_2(u) \in f(W)''$. Mettendo insieme, si ottiene che $(u, g_2(u)) \in f(W)' \times f(W)'' = f(W)$, come volevamo. Concludiamo infine che:

$$f(W) = \{(z, g_2(z)) : z \in V\}$$

ove ricordiamo anche che V è intorno aperto di 0. Peraltro, si può notare che $(0, 0) \in f(W)$.[6] In altre parole, l'immagine di f è localmente il grafico di una funzione differenziabile, come volevamo. $\square$

Come già notato rispetto al Teorema del Dini, questa proposizione è stata enunciata e dimostrata "centrata in zero", ma si può enunciare e dimostrare, con le opportune modifiche alle ipotesi, per punti arbitrari. Notiamo anche che la formula che definisce la funzione g, e di conseguenza la g_2 che realizza la tesi, dipende solo dalla formula che definisce la f, fissata la proiezione π. Questo significa che, applicando il risultato a più punti distinti, *si trovano grafici locali della stessa funzione.* Per concludere la sezione, resta un ultimo risultato piuttosto interessante, espresso come corollario del Teorema del Dini.

[5] È per essere sicuri di non avere una $f(W)$ banale, per esempio ridotta ad un punto, giacché si vedrà che $f(W)$ è proprio quel "sottoinsieme locale" di $\operatorname{Im} f$ che scriveremo come grafico di funzione.

[6] Si può notare sin dall'inizio del procedimento dimostrativo.

Corollario 2.6. *Il Teorema del Dini implica il Teorema della funzione inversa.*

Dimostrazione. Mettiamoci nelle ipotesi del teorema dell'inversa con la scelta di $p = 0$ e con l'ipotesi aggiuntiva che la funzione in gioco si annulli in 0 (conviciamoci che non si perde in generalità, vista la possibilità di definire opportuni ausiliarie per ricondursi al caso generale). Sia dunque $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un intorno aperto di 0, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile tale che $f(0) = 0$ e df_0 sia biunivoco (rango massimo). Applicando il Teorema del Dini, cerchiamo un intorno aperto di 0 $W \subseteq U$ tale che la restrizione a W di f sia un diffeomorfismo. L'idea chiave è introdurre la seguente funzione: $F : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definita da $F(x, y) = y - f(x)$. Notiamo che F è differenziabile, che $F(0, 0) = 0 - f(0) = 0$; poi, notiamo che vale l'uguaglianza (vettoriale) $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(0, 0) = -\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ per $i = 1, \dots, m$; di conseguenza possiamo scrivere che $JF_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -Jf_0 & B \end{pmatrix}$ ove B è una certa sottomatrice che non ci interessa calcolare, infatti siccome Jf_0 è invertibile, sicuramente $JF_{(0,0)}$ ha rango massimo pari a m, in altre parole $dF_{(0,0)}$ è suriettivo. Siamo nelle ipotesi giuste per poter applicare il Teorema del Dini. Dunque abbiamo che:

$$F^{-1}(0) \overset{\text{loc.}}{=} \{(g(v), v), v \in V\}$$

per una certa $g : V \to U$ differenziabile, ove $V \subseteq \mathbb{R}^m$ è intorno aperto di 0. Ora – attenzione – notiamo che $F(g(v), v) = 0 = v - f(g(v))$ per ogni $v \in V$, da cui possiamo ovviamente affermare che $v = f(g(v))$, cioè che $(f \circ g)(v) = v$ per ogni $v \in V$. Facciamo ora le ultime (doverose) verifiche. Possiamo senz'altro supporre g suriettiva considerandola a valori in $g(V) \subseteq U$. Ovviamente $f \circ g : V \to V$ è biunivoca essendo la funzione identità su V, e con tali ipotesi si dimostra che g è necessariamente iniettiva, quindi biunivoca. Ora, abbiamo che g è biunivoca e, per l'uguaglianza appena sopra ottenuta, f è sicuramente la sua inversa in V; allora possiamo effettivamente affermare che f è biunivoca e $g =: f^{-1}$ in V. Siccome poi $f^{-1} : V \to g(V)$, allora $f : g(V) \to V$ (tutto torna, ricorda che $g(V) \subseteq U$). Grazie alle ipotesi e alla differenziabilità di $g = f^{-1}$, possiamo infine concludere che f ristretta a $g(V) =: W \subseteq U$ è differenziabile con l'inversa differenziabile, quindi è un diffeomorfismo. □

Per concludere la sezione, notiamo che grazie a questo corollario abbiamo effettivamente dimostrato l'equivalenza fra i teoremi dell'inversa, del rango e del Dini. Infatti abbiamo ottenuto ciascun risultato dal precedente, non è male come cosa anche se ricostruire gli appunti è stato estenuante, e per fortuna non mi tocca farlo con le superfici.

3 Superfici in $\mathbb{R}^3$

3.1 Superfici regolari

Diamo una definizione di natura anche un po' topologica di superficie in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 3.1 (Curva regolare)**.** *Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare se, per ogni $p \in S$, esistono un intorno aperto di p della topologia indotta, $V \subseteq S$, un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e un'applicazione $\mathbf{x} : U \to V$ tale che:*

1. $\mathbf{x}$ *sia differenziabile.*

2. $\mathbf{x}$ *sia un omeomorfismo.*

3. $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ *sia iniettivo per ogni $(u, v) \in U$.*

Cioè, per ogni punto della superficie trovi un suo intorno aperto della topologia indotta che sia immagine di un certo aperto di $\mathbb{R}^2$ secondo una certa applicazione $\mathbf{x}$ che abbia quelle proprietà, detta *parametrizzazione o carta locale.* In sostanza l'idea generale è che una superficie regolare è localmente "riconducibile" ad un sottoinsieme del piano in modo "bello", cioè mediante quella applicazione. Di solito si indicano con (u, v) le coordinate di un generico punto in U. Notiamo che, spesso e volentieri, si dovranno dare più parametrizzazioni per coprire tutta la superficie e dimostrarne la regolarità, anche se a volte ne basteranno solo una o due per soddisfare le condizioni richieste (e quindi "ricoprire"). Operativamente, verificare che una superficie è regolare si traduce nella ricerca esplicita di quelle parametrizzazioni, che considerate nel loro insieme devono "ricoprire" tutta la superficie, come già suggerito. Gli esempi di superfici regolari si sprecano, ma non in questa dispensa riporterò solo quelli che richiedono meno conti, perché ci vuole troppo tempo altrimenti. Per esempio, la sfera unitaria S^2 è una superficie regolare, e si possono dare almeno tre famiglie di parametrizzazioni esplicite. Nella teoria, vedremo piuttosto *classi di superfici regolari.* Di seguito, se ne dà una prima.

Proposizione 3.1. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f : U \to R$ una funzione differenziabile. Allora il grafico di f, cioè l'insieme $S := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$, è una superficie regolare.*

Dimostrazione. È molto semplice, basta una sola parametrizzazione $\mathbf{x} : U \to S$, data da:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

È chiaramente differenziabile. Nondimeno, fissato $(u, v) \in U$, il suo differenziale $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ è iniettivo poiché si ottiene che

$$J\mathbf{x}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

Per finire, è effettivamente un omeomorfismo. Infatti la sua inversa $\mathbf{x}^{-1} : S \to U$ è la proiezione, cioè quella mappa tale che $(u, v, f(u, v)) \mapsto (u, v)$. Essa è ben definita, perché ogni punto di S, per definizione, si scrive come $(u, v, f(u, v))$ per un opportuno $(u, v) \in U$, e ovviamente è continua. Abbiamo finito. $\square$

In vista di dimostrare la regolarità di altre classi di superfici, un'importante definizione generale.

Definizione 3.2 (Punto e valore critico, valore regolare)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $F : U \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Diciamo che $p \in U$ è un punto critico per F se il differenziale $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non è suriettivo (o iniettivo), cioè non ha rango massimo. L'immagine $F(p) \in \mathbb{R}^m$ di un punto critico si dice valore critico di F. Un punto di $\mathbb{R}^m$ che non sia valore critico si dice valore regolare.*

Dalla definizione, notiamo che un valore regolare deve essere per forza immagine di punti tutti non critici. In altre parole, *un punto q di $\mathbb{R}^m$ è un valore regolare per F se e solo se la sua controimmagine $F^{-1}(q)$ non contiene punti critici.* Facciamo attenzione a quanto appena detto perché è un fatto banale ma che si usa operativamente. Segue un'interessante proposizione che, come predetto, introduce una nuova classe di superfici regolari.

Proposizione 3.2. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto, $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia poi $a \in f(U)$ un valore regolare di f. Allora $f^{-1}(a) \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare.*

Dimostrazione. È pressoché immediata applicando il Teorema del Dini. Siccome a è valore regolare per f, senz'altro $f^{-1}(a)$ è un insieme di punti tali che df_p è suriettivo, per ogni $p \in f^{-1}(a)$. Applicando il teorema del Dini, troviamo per ogni p un suo intorno aperto W_p tale che $f^{-1}(a) \cap W_p = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in V_p'' \subseteq \mathbb{R}^2\}$, per una certa $g : V_p'' \to \mathbb{R}^2$ differenziabile. Ora, considerando $\bigcup_p (f^{-1}(a) \cap W_p) = f^{-1}(a)$ troviamo l'unione di un certo numero di grafici di funzioni. Per il risultato precedente, possiamo trovare per ciascuno di essi una parametrizzazione $\mathbf{x}_p$ che soddisfi le proprietà volute. Abbiamo finito, perché messe insieme quelle parametrizzazioni ricoprono tutta $f^{-1}(a)$. Puoi vederlo rigorosamente, se non sei convinto: fissa $y \in f^{-1}(a)$. Allora, visto che $f^{-1}(a)$ è proprio uguale all'unione di tutti quei grafici, y apparterrà sicuramente ad uno di essi, per esempio $y \in f^{-1}(a) \cap W_q$, e hai già trovato l'intorno aperto di y cercato (è banale, ricorda la definizione di sup. regolare). Ora applica pure il risultato precedente, e trova una parametrizzazione $\mathbf{x}_q : U_q \to f^{-1}(a) \cap W_q$, ove $U_q \subseteq \mathbb{R}^2$ è un certo aperto. Abbiamo trovato tutto quello che richiede la definizione di superficie regolare, compresa l'arbitrarietà di $y \in f^{-1}(a)$. Dunque effettivamente $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare. $\square$

Un paio di esempi che vengono benino:

- *L'ellissoide.* L'ellissoide è per definizione quel sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Esso è una superficie regolare. Dimostriamolo usando la proposizione appena vista. Attenzione al metodo che è abbastanza standard, e consiste nel rappresentare la superficie voluta come controimmagine di un certo valore, che si vorrà essere regolare. In questo caso, si introduce la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

e si nota che l'ellissoide altri non è che $f^{-1}(0)$. Se dunque $0 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare, abbiamo finito. Per mostrarlo, il metodo è quello di valutare il differenziale di f per cercare i punti critici di f e sperare che nessuno di essi appartenga a $f^{-1}(0)$. Viene senza alcun problema $\nabla f = (2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2)$. Ora notiamo subito che $\nabla f = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z = 0$ (si effettua questa valutazione perché l'unico modo affinché il gradiente non abbia rango massimo è che esso sia il vettore nullo). Dunque concludiamo immediatamente che l'unico punto critico di f è il punto $(0, 0, 0)$. Ma $(0, 0, 0)$ non appartiene a $f^{-1}(0)$. Dunque 0 è effettivamente valore regolare per f. Per quanto detto, l'ellissoide è una superficie regolare. Peraltro, nel caso particolare in cui $a = b = c = 1$, si ottiene la sfera unitaria S^2, che è quindi superficie regolare.

- *Il toro.* Il toro T è ottenuto facendo ruotare una circonferenza di raggio r attorno una linea retta che appartiene al piano in cui giace la circonferenza, a una distanza $a > r$ dal centro della circonferenza (facendo il disegno si capisce bene, ma qui risulta difficile). Usando la geometria analitica, supponi di prendere la circonferenza nel piano $\{x = 0\}$ di raggio r e centrata in $(0, a, 0)$. La sua espressione analitica si ottiene (geometria analitica standard) intersecando la sfera di raggio r e centrata in quel punto con il piano dato da $x = 0$. L'espressione di quella circonferenza che si ottiene è: $(y - a)^2 + z^2 = r^2$. In generale, si ricava con un po' di geometria analitica (e col teorema di Pitagora) che un arbitrario punto $(x, y, z) \in T$ soddisfa l'equazione:

$$z^2 = r^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2$$

Procediamo ora come per l'ellissoide, qui però come candidato a valore regolare della funzione f che stiamo per definire scegliamo r^2.

Definiamo dunque $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ come:

$$f(x,y,z) = z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2$$

Si ha dunque che $T = f^{-1}(r^2)$. Notiamo che f è differenziabile ovunque eccetto che per i punti tali che $x = y = 0$ (che potrebbro inficiare, ma non appartengono a $f^{-1}(r^2)$, quindi non creano problemi). Ora, come nell'esempio precedente, calcoliamo il gradiente della funzione cercando gli eventuali punti critici (che poi sono per forza quelli che annullano il gradiente) nella speranza che non appartengano a $f^{-1}(r^2)$. Facendo il conto, esce:

$$\nabla f = \left(\frac{2x\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z \right)$$

Hai che $\nabla f \neq (0,0,0)\ \forall\, (x,y,z) \neq (0,0,0)$, punto che peraltro è di non differenziabilità e che comunque si è già visto non appartenere a $f^{-1}(r^2)$. Quindi r^2 è un valore regolare per f, e concludiamo che il toro $T = f^{-1}(r^2)$ è una superficie regolare.

Ora, una condizione necessaria perché un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sia superficie regolare.

Proposizione 3.3. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Allora per ogni $p \in S$ esiste un intorno aperto V di p in S tale che V è il grafico di una funzione differenziabile f, grafico che ha una delle seguenti forme: $(x, y, f(x, y))$, $(x, g(x, z), z)$, $(h(y, z), y, z)$.*

Dimostrazione. Usando il risultato della Proposizione 2.5, si arriva velocemente a conclusione. Fissato $p \in S$, sfruttiamo l'ipotesi di regolarità della superficie. In particolare, troviamo una parametrizzazione locale di S a valori in un intorno aperto di p, cioè un omeomorfismo differenziabile $\mathbf{x} : U \to A$, con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un certo aperto e $A \subseteq S$ un certo intorno aperto di p (ricordare sempre che su S hai la topologia indotta). Varrà senz'altro, sempre usando l'ipotesi di regolarità, che $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ è iniettivo per ogni $(u, v) \in U$. Nondimeno, siccome $p \in A$ e $\mathbf{x}$ è biunivoca essendo omeomorfismo, esisterà $(u_p, v_p) \in U$ tale che $\mathbf{x}(u_p, v_p) = p$. Mettiamo l'ipotesi aggiuntiva che il minore "superiore" 2×2 di $J\mathbf{x}_{(u_p,v_p)}$ sia invertibile. Siamo ora nelle ipotesi giuste per applicare la Proposizione 2.5 nel punto $(u_p, v_p) \in U$, senza dover nemmeno cambiare coordinate grazie all'ipotesi aggiuntiva. Troviamo un intorno aperto $W \subseteq U$ di (u_p, v_p) tale che $\mathbf{x}(W) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \widetilde{W}\}$, con $p \in \mathbf{x}(W)$. $\widetilde{W}$ è come W un intorno aperto di (u_p, v_p), e $f : \widetilde{W} \to \mathbb{R}$. $\mathbf{x}(W) =: V$ è anche aperto poiché $\mathbf{x}$ è un omeomorfismo, ed è proprio il grafico locale che volevamo trovare. Notiamo anche che la formula che definisce

f dipenderà soltanto dalla formula che definisce $\mathbf{x}$. Cambiando l'ipotesi dell'invertibilità del minore "superiore" nell'invertibilità di uno degli altri due minori, e applicando la Proposizione 2.5 con le opportune varianti[7], si possono ottenere grafici locali che abbiano le altre due forme espresse nell'enunciato. □

Questo risultato, poiché come già detto ci fornisce una condizione necessaria per la regolarità di una superficie, può essere usato per dimostrare che una data superficie *non* è regolare, spesso ricorrendo ad un ragionamento per assurdo. Vediamo di seguito una proposizione di natura leggermente diversa, ma che ha il suo interesse.

Proposizione 3.4. *Sia S una superficie regolare. Dato $p \in S$, sia $\mathbf{x} : U \to S$ ove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto e $p \in \mathbf{x}(U)$. $\mathbf{x}$ sia poi differenziabile, iniettiva (quindi biunivoca a valori in $\mathbf{x}(U)$) e tale che $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ sia iniettivo per ogni $(u,v) \in U$. Allora $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to U$ è continua.*

Dimostrazione. Si tratta di un'altra applicazione del Teorema dell'inversa. Fissa un punto $q \in \mathbf{x}(U)$. Usiamo la condizione necessaria dimostrata sopra. S è una superficie regolare, quindi esiste un intorno aperto di q in S, $W \subseteq S$, tale che W è il grafico di una funzione differenziabile definita in un certo aperto $V \subseteq \mathbb{R}^2$, in formule $W = \{(x, y, g(x, y) : (x, y) \in V\}$ con $g : V \to \mathbb{R}$ differenziabile. Ora, siccome $W \subseteq S$ è un aperto, per la continuità di $\mathbf{x}$ si ha che $N := \mathbf{x}^{-1}(W) \subseteq U$ è un insieme aperto. A questo punto, attenzione: si considera la funzione $\pi \circ \mathbf{x} : N \to V$, ove π è la proiezione $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Notiamo che $r := \mathbf{x}^{-1}(q) \in \mathbf{x}^{-1}(W) \subseteq U$, di conseguenza $d\mathbf{x}_r$ è iniettivo per l'ipotesi, e possiamo come al solito supporre senza perdere in generalità che $J\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} A \\ {}^t\mathbf{v} \end{pmatrix}$ ove A è una matrice 2×2 invertibile, $\mathbf{v}$ un vettore di due componenti che non ci interessa calcolare. A questo punto, ripetendo un calcolo già visto in una dimostrazione precedente, possiamo affermare senza patemi che $d(\pi \circ \mathbf{x})_r = d\pi_{\mathbf{x}(r)} \circ d\mathbf{x}_r$ è invertibile. Possiamo quindi applicare il Teorema dell'inversa, trovando un certo intorno aperto $\Omega \subseteq N$ del punto r tale che la restrizione $\pi \circ \mathbf{x} : \Omega \to (\pi \circ \mathbf{x})(\Omega)$ è un diffeomorfismo. Ora notiamo che, giacché quell'applicazione è un diffeomorfismo, allora è un'applicazione aperta, quindi $(\pi \circ \mathbf{x})(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto. Nondimeno, π è continua, per cui sicuramente $\pi^{-1}\left((\pi \circ \mathbf{x})(\Omega)\right) = \pi^{-1}\left(\pi\left(\mathbf{x}(\Omega)\right)\right) = \mathbf{x}(\Omega)$ è un insieme aperto in S. Ora, nota che $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} = \mathbf{x}^{-1} \circ \pi^{-1}$, ed è definita in $(\pi \circ \mathbf{x})(\Omega)$. Possiamo comporre a destra con π in entrambi i membri, e ottenere che $(\pi \circ \mathbf{x})^{-1} \circ \pi = \mathbf{x}^{-1}$, scrittura valida se ovviamente ci restringiamo a $\mathbf{x}(\Omega)$. Notiamo che in quella restrizione $\mathbf{x}^{-1}$ è la composizione di due funzioni continue, quindi è continua, e in particolare è continua in $\mathbf{x}(r) = q$ (ricorda

[7] Ripercorrendo la dimostrazione di quella proposizione, si tratta solo di dare un opportunamente diverso ruolo alla proiezione π.

che Ω è intorno aperto di r). Ma q è stato fissato arbitrario in $\mathbf{x}(U)$ all'inizio del procedimento, quindi $\mathbf{x}^{-1}$ è continua in tutto $\mathbf{x}(U)$. $\square$

Insomma, se sappiamo per altre vie che S è una superficie regolare e abbiamo una funzione $\mathbf{x}$ candidata a essere parametrizzazione locale, ci basta verificare solo la differenziabilità, l'iniettività del differenziale e la bigettività della mappa stessa, poiché la continuità della sua inversa esce automaticamente come conseguenza di tali condizioni, come ci dice la proposizione.

3.2 Cambio di parametri, funzioni differenziabili su superfici

Data una superficie regolare S, vorremmo ora definire la differenziabilità per una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ in un punto $p \in S$. L'idea sarà ricondursi ad una certa parametrizzazione locale, quindi scrivere il generico $p \in S$ come $p = \mathbf{x}(u, v)$ e valutare la differenziabilità nei parametri u, v di $f(p) = f(\mathbf{x}(u, v)) = (f \circ \mathbf{x})(u, v)$. Prima di dare la definizione rigorosa, bisogna risolvere una questione importante. Infatti in generale è possibile scegliere più di una parametrizzazione per intorni aperti del generico $p \in S$, e noi vorremmo che la definizione di differenziabilità data non dipendesse dalla parametrizzazione scelta. Vediamo rigorosamente che la cosa funziona.

Proposizione 3.5 (Cambio di parametri)**.** *Sia $p \in S$ ove S è una superficie regolare, siano poi $\mathbf{x} : U \to S$, $\mathbf{y} : V \to S$ (U e V aperti di $\mathbb{R}^2$) due parametrizzazioni locali di S tali che $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) =: W$. Allora il "cambio di parametri" dato da $h := \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Intanto $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ è un omeomorfismo, perché composizione di omeomorfismi. Va vista in dettaglio la questione della differenziabilità. Attenzione al procedimento, ora. Per cominciare, fissiamo $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$, e poniamo $q := h(r) \in \mathbf{x}^{-1}(W)$. Cerchiamo di dimostrare che h è differenziabile in r e concludere grazie all'arbitrarietà della scelta di r. Notiamo che $\mathbf{x}$ è per ipotesi una parametrizzazione, quindi sicuramente $d\mathbf{x}_q$ è iniettivo. Cambiando opportunamente da subito i ruoli degli assi coordinati[8], possiamo applicare alla funzione $\mathbf{x}$ nel punto q la versione iniettiva del Teorema del rango: esistono dunque $M \subseteq \mathbb{R}^3$ intorno aperto di $\mathbf{x}(q)$, un aperto $\overline{M} \subseteq U \times \mathbb{R}$ e un diffeomorfismo $\varphi : M \to \overline{M}$. Ricordiamo che, nelle notazioni del Teorema del rango, era $\varphi = \rho^{-1}$ ove in questo caso $\rho : \overline{M} \to M$ con $\rho(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$, e notiamo anche che $\rho(u, v, 0) = \mathbf{x}(u, v)$.[9] A questo punto, ci accorgiamo che $\mathbf{x}(q) = \mathbf{x}(h(r)) \overset{h=\mathbf{x}^{-1}\circ\mathbf{y}}{=} \mathbf{y}(r) \in M \subseteq W$. Ora, abbiamo per ipotesi che $\mathbf{y}$ è continua, quindi a maggior ragione è

[8] Tanto se non lo si fa subito, lo si fa implicitamente mediante l'applicazione del Teorema del rango.

[9] Per chi si stupisse, ricordo che $\mathbf{x}$ è espressa come al solito nei suoi parametri u, v e che la notazione canonica prevede che $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)$.

continua in r. Ricordando allora la definizione esplicita di continuità[10], abbiamo senz'altro che esiste un intorno aperto $N \subseteq \mathbf{y}^{-1}(W)$ di r tale che $\mathbf{y}(N) \subseteq M$, poiché M è un intorno aperto di $\mathbf{x}(q) = \mathbf{y}(r)$. Ora, attenzione: poiché $N \subseteq \mathbf{y}^{-1}(W)$ allora $\mathbf{y}(N) \subseteq W$, dunque vale sicuramente che $\mathbf{y}(N) \subseteq W \cap M$. Ora, attenzione: per continuare, voglio dimostrare che $\pi \circ \varphi_{|\mathbf{y}(N)} = \mathbf{x}^{-1}{}_{|\mathbf{y}(N)}$, così da poter affermare che $\mathbf{x}^{-1}$ è differenziabile in tale restrizione ($\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è la proiezione, ovviamente differenziabile, e la composizione di mappe differenziabili è differenziabile). Per farlo, fissiamo $(u_a, v_a) \in \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{y}(N))$. Ora occupiamoci di $\varphi(\mathbf{x}(u_a, v_a)) = (\varphi \circ \mathbf{x})(u_a, v_a)$. Possiamo applicare la parte finale del Teorema del rango (versione iniettiva) e affermare che $\varphi(\mathbf{x}(u_a, v_a)) = (u_a, v_a, 0)$. Ora, applichiamo π e troviamo che $((\pi \circ \varphi) \circ \mathbf{x})(u_a, v_a) = \pi(u_a, v_a, 0) = (u_a, v_a)$. L'arbitrarietà della scelta di (u_a, v_a) ci permette di concludere che effettivamente $\pi \circ \varphi_{|\mathbf{y}(N)} = \mathbf{x}^{-1}{}_{|\mathbf{y}(N)}$ A questo punto, possiamo notare che $(\pi \circ \varphi_{|\mathbf{y}(N)}) \circ \mathbf{y}_{|N} = \mathbf{x}^{-1}{}_{|\mathbf{y}(N)} \circ \mathbf{y}_{|N} = h_{|N}$. Dunque h ristretta a N è differenziabile, essendo la composta di applicazioni differenziabili, e a maggior ragione è differenziabile in $r \in N$. Ma r è stato scelto arbitrario in $\mathbf{y}^{-1}(W)$, di conseguenza h è differenziabile in tutto $\mathbf{y}^{-1}(W)$. Con lo stesso procedimento e le opportune variazioni formali si può mostrare che h^{-1} è differenziabile. In conclusione, h è un diffeomorfismo, come volevamo. $\square$

L'idea è quindi che, nelle zone che è possibile parametrizzare in due modi diversi, il passaggio da un sistema di parametri all'altro è un diffeomorfismo, che è proprio la formalizzazione di ciò che ci eravamo preposti di ottenere. Ora possiamo definire rigorosamente il concetto di funzione differenziabile su una superficie.

Definizione 3.3. *Sia S una superficie regolare, $V \subseteq S$ un aperto di S, e sia $f : V \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è differenziabile in $p \in V$ se, data una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \to S$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto) con $p \in \mathbf{x}(U)$, la composizione $f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbf{x}^{-1}(p)$. f si dice differenziabile se è differenziabile in ogni punto di V.*

Insomma, si usa il fatto di poter vedere ogni punto della superficie come immagine di un'opportuna parametrizzazione. Per esempio, si scrive $p = \mathbf{x}(u_p, v_p)$ e $(f \circ x)(u_p, v_p) = f(\mathbf{x}(u_p, v_p))$ e quindi si valuta la differenziabilità in $(u_p, v_p) = \mathbf{x}^{-1}(p)$.

Piuttosto, è importante verificare che la definizione è effettivamente indipendente dalla scelta della parametrizzazione, e per farlo si usa chiaramente il risultato della Proposizione 3.5. Supponi dunque che $\mathbf{y} : U' \to S$ ($U' \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto), con $p \in \mathbf{y}(U')$, sia un'altra parametrizzazione. Per il risultato dimostrato, $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ è un diffeomorfismo, e abbiamo che $f \circ \mathbf{y} = f \circ \mathbf{x} \circ h$. Dunque, se $f \circ \mathbf{x}$ è differenziabile in $\mathbf{x}^{-1}(p)$, si vede subito che anche $f \circ \mathbf{y}$

[10] Per ogni intorno I di $\mathbf{y}(r)$ esiste un intorno J di r tale che $\mathbf{y}(J) \subseteq I$.

è differenziabile in $\mathbf{y}^{-1}(p)$, e vale pure il viceversa, da cui l'indipendenza voluta. Ora possiamo definire il concetto di funzione differenziabile tra due superfici, per poi parlare anche di diffeomorfismi tra superfici.

Definizione 3.4. *Siano S_1 e S_2 due superfici regolari, $V_1 \subseteq S_1$ un aperto di S_1, e sia $\varphi : V_1 \to S_2$ una funzione continua. Diciamo che φ è differenziabile in $p \in V_1$ se, date due parametrizzazioni $\mathbf{x}_1 : U_1 \to S_1$ e $\mathbf{x}_2 : U_2 \to S_2$ (U_1 e U_2 aperti di $\mathbb{R}^2$) con $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subseteq \mathbf{x}_2(U_2)$, l'applicazione $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to U_2$ è differenziabile in $\mathbf{x}^{-1}(p)$.*

Si tratta di una definizione un filo contorta ma, a ragionarci un attimo, naturale. L'idea di fondo è sempre quella di vedere ogni punto delle superfici come immagine di una parametrizzazione, e ricondursi appunto ai parametri per definire la differenziabilità, questo con le giuste composizioni di funzioni. Notiamo che *il "ricondursi ai parametri" per studiare entità legate alle superfici è un'operazione che si fa praticamente sempre*, quindi sarà bene imparare a ragionare in questi termini. Anche tale definizione è indipendente dalla scelta di parametrizzazione, fatto che si può dimostrare usando ancora la Proposizione 3.5.

Definizione 3.5 (Diffeomorfismo tra superfici, superfici diffeomorfe)**.** *Date S_1 e S_2 superfici regolari, un'applicazione $\varphi : S_1 \to S_2$ è un diffeomorfismo se è biunivoca, differenziabile e con l'inversa differenziabile. Due superfici si dicono diffeomorfe se esiste un diffeomorfismo dalla prima alla seconda.*

È utile notare che, dal punto di vista della differenziabilità e di tutte le proprietà che da essa conseguono, due superfici diffeomorfe sono indistinguibili e possono essere sostanzialmente identificate. È un po' quello che succede mutatis mutandis con due gruppi isomorfi. A questo punto, dimostriamo un fatto interessante.

Proposizione 3.6. *Ogni parametrizzazione locale di una superficie S è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{x} : U \to S$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto) è una parametrizzazione locale di S, ci basta ovviamente dimostrare che $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to U$ è differenziabile. Per vederlo, fissiamo $p \in \mathbf{x}(U)$ e poniamo $q := \mathbf{x}^{-1}(p)$. Possiamo applicare la versione iniettiva del Teorema del rango e trovare un diffeomorfismo $\varphi : W \to V$, con W intorno aperto di p, tale che $\varphi \circ \mathbf{x} : \mathbf{x}^{-1}(W) \to V$ è tale che $(\varphi \circ \mathbf{x})(u, v) = (u, v, 0)$. Allora, data $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la solita proiezione, notiamo che $((\pi \circ \varphi) \circ \mathbf{x})(u, v) = (u, v)$, con $(u, v) \in \mathbf{x}^{-1}(W)$, dunque si ha che ${\mathbf{x}^{-1}}_W = \pi \circ \varphi$ è differenziabile perché composta di applicazioni differenziabili. Ma ricordiamo che $p \in W$, dunque è a maggior ragione differenziabile in p. L'arbitrarietà dello stesso p in $\mathbf{x}(U)$ ci permette di concludere che $\mathbf{x}^{-1}$ è differenziabile in tutto $\mathbf{x}(U)$, come volevamo. $\square$

Notiamo con interesse che questo risultato ci permette di affermare che *ogni superficie regolare è localmente diffeomorfa al piano* $\mathbb{R}^2$.

A questo punto della teoria, è utile dare una definizione di *curva regolare* più generale e formalmente analoga a quella di superficie regolare.

Definizione 3.6 (Curva regolare). *Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^3$ è una curva regolare se, per ogni $p \in C$, esistono un intorno aperto di p della topologia indotta, $V \subseteq C$, un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ e un'applicazione $\alpha : I \to V$ tale che:*

1. *α sia differenziabile.*

2. *α sia un omeomorfismo.*

3. *$d\alpha_t$ sia iniettivo per ogni $t \in I$.*

D'ora in poi con *curva regolare* si intenderà la definizione appena data. La definizione "classica" di curva regolare parametrizzata risulta meno efficiente volendo approfondire la teoria. Con tale definizione, valgono mutatis mutandis gli enunciati e le dimostrazioni delle proposizioni viste per le superfici regolari. In ogni caso, non approfondirò ulteriormente.

Superfici di rotazione Ora costruiamo una particolare superficie S, ottenuta dalla rotazione di una curva piana regolare C. Mettendoci nel caso più familiare, supponiamo C sia contenuta nel piano $\{y = 0\}$ e abbia parametrizzazioni della forma $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, con $v \in (a, b)$ e $f(v) > 0$ per ogni v (facendo un disegno è tutto più chiaro). Possiamo definire una mappa

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$$

definita in $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ e a valori nella superficie S, che tale tipologia di mappa in realtà definisce. Si può dimostrare che $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione locale di S; ovviamente S, per la sua stessa definizione, può essere ricoperta da simili parametrizzazioni, quindi è una superficie regolare detta *superficie di rotazione*. Volendo entrare nei dettagli della dimostrazione del fatto che $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione locale:

1. $\mathbf{x}$ *è differenziabile.* Si vede senza alcun problema, tenendo presente che f e g sono necessariamente differenziabili giacché sono componenti di una parametrizzazione della curva C.

2. $\mathbf{x}$ *è un omeomorfismo.* Vediamo per prima cosa che $\mathbf{x}$ è iniettiva (quindi biunivoca a valori nella sua immagine, in ogni caso siamo già rassicurati del fatto che possiamo ricoprire tutta S con parametrizzazioni di questo tipo). Usando la definizione di iniettività, fissiamo

$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U$ tali che $\mathbf{x}(u_1, v_1) = \mathbf{x}(u_2, v_2)$. Quest'uguaglianza si traduce nel sistema seguente:

$$\begin{cases} f(v_1)\cos u_1 &= f(v_2)\cos u_2 \\ f(v_1)\sin u_1 &= f(v_2)\sin u_2 \\ g(v_1) &= g(v_2) \end{cases}$$

Questo implica, elevando al quadrato i membri delle prime due equazioni e sommandoli termine a termine, che

$$f(v_1)^2\cos^2 u_1 + f(v_1)^2\sin^2 u_1 = f(v_2)^2\cos^2 u_2 + f(v_2)^2\sin^2 u_2$$

da cui deduciamo subito $f(v_1)^2 = f(v_2)^2$ che, siccome $f(v) > 0$, implica senz'altro che $f(v_1) = f(v_2)$. Dal momento che abbiamo anche $g(v_1) = g(v_2)$ e le funzioni f e g sono componenti di una parametrizzazione della curva C, che deve essere iniettiva, abbiamo necessariamente $v_1 = v_2$. A questo punto il sistema è diventato semplicemente:

$$\begin{cases} \cos u_1 &= \cos u_2 \\ \sin u_1 &= \sin u_2 \end{cases}$$

Risolvendo molto semplicemente la seconda equazione goniometrica, troviamo due valori possibili per u_1, cioè $u_1 = u_2$ oppure $u_1 = \pi - u_2$ (ricordo che $u_1, u_2 \in (0, 2\pi)$ per ipotesi). Nel primo caso abbiamo già concluso, per quanto riguarda il secondo, sostituendo u_1 nella prima equazione si trova a $\cos(\pi - u_2) = -\cos u_2 = \cos u_2$ che implica necessariamente $u_2 = \pi/2$ oppure $u_2 = 3\pi/2$. Nel primo di questi due casi, troviamo che anche $u_1 = \pi - \pi/2 = \pi/2$, cioè $\pi/2 = u_1 = u_2$; nel secondo, troviamo $u_1 = -\pi/2$ che è un assurdo poiché, come detto, $u_1, u_2 \in (0, 2\pi)$. In ogni caso, concludiamo che $u_1 = u_2$. Quindi, in definitiva, $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ da cui l'iniettività voluta.

Ora, bisogna mostrare che $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to U$ è continua, da cui concludere direttamente che $\mathbf{x} : U \to \mathbf{x}(U)$ è un omeomorfismo. Purtroppo l'unico modo per verificarlo è ricavare manualmente l'inversa e verificarne la continuità. Operativamente e un po' brutalmente, fissando arbitrario $(x, y, z) \in \mathbf{x}(U)$ e scrivendo $(x, y, z) = \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, voglio ricavare $(u, v) = \mathbf{x}^{-1}(x, y, z)$ e controllare la continuità direttamente dall'espressione ottenuta. Nel nostro caso, si parte dal sistema:

$$\begin{cases} x &= f(v)\cos u \\ y &= f(v)\sin u \\ z &= g(v) \end{cases}$$

L'idea è lavorare separatamente per ciascuno dei due parametri u e v. Notiamo per cominciare che $x^2 + y^2 = f(v)^2$, da cui grazie al fatto che $f(v) > 0$ possiamo scrivere $f(v) = \sqrt{x^2+y^2}$. Avendo già che $z = g(v)$, possiamo riscrivere la parametrizzazione per la curva C data come $\alpha(v) = (\sqrt{x^2+y^2}, 0, z)$, da cui possiamo scrivere $v = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z)$, con α^{-1} che è continua essendo un omeomorfismo. Per quanto riguarda il parametro u, procediamo nel modo seguente. Supponiamo che $u \neq \pi$ e ricordiamo la seguente formula:

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1+\cos u}$$

Ora, notiamo dal sistema scritto che $\sin u = y/f(v)$ e $\cos u = x/f(v)$, e pure che $f(v) = \sqrt{x^2+y^2}$ per quanto calcolato sopra. Sostituendo nella formula appena scritta e facendo qualche semplice calcolo, troviamo:

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Da cui, invertendo la funzione tangente, arrivamo a scrivere:

$$u = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Supponendo poi u appartenente ad un intornino aperto di π, possiamo fare lo stesso lavoro con la funzione cotangente, e arrivare a:

$$u = 2\cot^{-1}\frac{y}{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

A questo punto, si vede (volendo verificando anche rigorosamente la continuità) che $u = h(x, y, z)$ ove h è una funzione continua. Mettendo insieme, si trova:

$$(u, v) = \mathbf{x}^{-1}(x, y, z) = (h(x, y, z), \alpha^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z))$$

Per le verifiche fatte e grazie all'arbitrarietà della scelta di $(x, y, z) \in \mathbf{x}(U)$, $\mathbf{x}^{-1}$ è una funzione continua in tutto $\mathbf{x}(U)$, come volevamo.

3. $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ *è iniettivo per ogni* $(u, v) \in U$. Calcoliamolo nel generico punto. Viene, facendo i (semplici) conti, che:

$$J\mathbf{x}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -f(v)\sin u & f'(v)\cos u \\ f(v)\cos u & f'(v)\sin u \\ 0 & g'(v) \end{pmatrix}$$

Supponiamo per assurdo che non sia iniettivo in tutto U. Allora esiste un punto (u_0, v_0) tale che il rango del differenziale in quel punto è minore di 2, e quindi i determinanti dei minori 2×2 sono tutti nulli. Calcolandoli, giungiamo al sistema:

$$\begin{cases} f(v_0)f'(v_0) & = 0 \\ f(v_0)g'(v_0)\cos u_0 & = 0 \\ f(v_0)g'(v_0)\sin u_0 & = 0 \end{cases}$$

Siccome $f(v_0) > 0$ per ipotesi, troviamo che $f'(v_0) = 0$ dalla prima equazione. Se poi $g'(v_0) \neq 0$, allora vediamo dal sistema che dobbiamo avere $\cos u_0 = \sin u_0 = 0$. Ma notiamo che questo è un assurdo, perché $\cos u_0 = \sin u_0 \Leftrightarrow u_0 = \pi/4 + k\pi$, da cui $\cos u_0 = \sin u_0 = \pm\sqrt{2}/2 \neq 0$, assurdo. Dunque abbiamo sicuramente che $g'(v_0) = 0$. Ma ora ricordiamo che f e g sono le componenti di una parametrizzazione di una curva regolare, di conseguenza per la definizione stessa non può accadere che $f'(v_0) = g'(v_0) = 0$. Questa contraddizione nasce dall'aver supposto l'esistenza di un punto $(u_0, v_0) \in U$ tale che $d\mathbf{x}_{(u_0,v_0)}$ non fosse iniettivo. Allora è effettivamente vero che $d\mathbf{x}_{(u,v)}$ è iniettivo per ogni $(u, v) \in U$, come volevamo.

Segnaliamo, a conclusione del paragrafo, che la curva C si dice *curva generatrice* della superficie di rotazione S, che nel caso trattato l'asse z è detto *asse di rotazione*, e che le curve coordinate della superficie $\gamma_1(v) := \mathbf{x}(u_0, v)$ e $\gamma_2(u) := \mathbf{x}(u, v_0)$ (u_0 e v_0 opportunamente fissati) sono dette rispettivamente *meridiani* e *paralleli*.

3.3 Piano tangente, differenziale di mappe tra superfici regolari

Partiamo dalla definizione di *vettore tangente* per procedere poi a definire e caratterizzare il piano tangente, oggetto che geometricamente si intuisce abbastanza bene.

Definizione 3.7 (Vettore tangente)**.** *Data una superficie regolare S e un punto $p \in S$, diciamo che un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ è un vettore tangente a S in p se esiste una curva parametrizzata differenziabile $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$.*

Attenzione al risultato seguente, che ci permetterà di dare una definizione rigorosa di piano tangente.

Proposizione 3.7. *Sia data una superficie regolare S, un punto $p \in S$, e una parametrizzazione locale $\mathbf{x} : U \to S$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto) tale che $p \in \mathbf{x}(U)$. Posto $p = \mathbf{x}(q)$ con $q \in U$, si consideri $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Allora l'immagine di tale differenziale, cioè il sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$ $\operatorname{Im} d\mathbf{x}_q = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, coincide con l'insieme di tutti i vettori tangenti a S in p.*

Dimostrazione. Preliminarmente, notiamo che $\operatorname{Im} d\mathbf{x}_q$ ha sicuramente dimensione 2 poiché $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione e quindi $d\mathbf{x}_q$ è iniettivo. Entrando nel merito della dimostrazione, vediamo le due opposte inclusioni tra gli insiemi in gioco per mostrarne l'uguaglianza. Per cominciare, fissiamo $\mathbf{w}$ un generico vettore tangente a S in $p = \mathbf{x}(q)$ e vediamo che appartiene a

$\operatorname{Im} d\mathbf{x}_q$, cioè che esiste un vettore $\widetilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^2$ tale che $d\mathbf{x}_q(\widetilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}$. Per definizione di vettore tangente, troviamo una curva parametrizzata differenziabile $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{x}(U)$ (possiamo pensare di prendere un ε sufficientemente piccolo da far cadere $\operatorname{Im} \alpha$ in $\mathbf{x}(U)$) tale che $\alpha(0) = \mathbf{x}(q)$ e $\mathbf{w} = \alpha'(0)$. Ora definiamo una curva $\beta := \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, che è sicuramente differenziabile visto che α è differenziabile e anche $\mathbf{x}^{-1}$ lo è per la Proposizione 3.6. Ora notiamo che, per la chain rule, $d\beta_0 = d\mathbf{x}^{-1}{}_{\alpha(0)} \circ d\alpha_0$. Ma ora notiamo che $J\alpha_0 = \alpha'(0) = \mathbf{w}$, e nondimeno $J\beta_0 = \beta'(0) \in \mathbb{R}^2$, e ricordiamo che $\alpha(0) = \mathbf{x}(q)$. Dunque otteniamo $\beta'(0) = J\mathbf{x}^{-1}{}_{\mathbf{x}(q)} \cdot \mathbf{w}$. Ora, sempre usando la chain rule, notiamo che $J\mathbf{x}_q \cdot J\mathbf{x}^{-1}{}_{\mathbf{x}(q)} = I_3$, di conseguenza moltiplicando a sinistra i membri dell'espressione appena trovata per $J\mathbf{x}_q$, ricaviamo immediatamente che $J\mathbf{x}_q \cdot \beta'(0) = I_3 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}$. Equivalentemente, possiamo scrivere $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = \mathbf{w}$. Dunque $\beta'(0) \in \mathbb{R}^2$ è il $\widetilde{\mathbf{w}}$ cercato, e un'inclusione è dimostrata. Per vedere l'inclusione opposta, fissiamo (mi si perdoni la notazione ridondante con la parte precedente) $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} d\mathbf{x}_q$ e vediamo che è un vettore tangente a S in $\mathbf{x}(q)$. Per definizione di insieme immagine, esiste $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $d\mathbf{x}_q(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. A questo punto, definiamo una curva parametrizzata differenziabile $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ con $\gamma(t) := q + t\mathbf{v}$ (come prima, siamo liberi di scegliere un opportuno ε in modo che $\operatorname{Im} \gamma \subseteq U$). Notiamo subito che $\gamma'(t) \equiv \mathbf{v}$ e incidentalmente che $\gamma(0) = q$. Intuitivamente γ individua un "segmentino" attorno a q orientato nella direzione di $\mathbf{v}$. Ora, definiamo un'altra curva $\alpha := \mathbf{x} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{x}(U)$. Ora differenziamo α e troviamo grazie alla chain rule l'equazione $J\alpha_0 = J\mathbf{x}_{\gamma(0)} \cdot J\gamma_0$, che possiamo riscrivere, ricordando le osservazioni fatte finora, come $\alpha'(0) = J\mathbf{x}_q \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}$. Questo, unito al fatto che $\alpha(0) = \mathbf{x}(\gamma(0)) = \mathbf{x}(q)$, ci assicura che effettivamente $\mathbf{w}$ è un vettore tangente a S in $\mathbf{x}(q)$, come volevamo. La seconda delle due inclusioni è dimostrata, da cui la tesi. □

In virtù del risultato appena dimostrato, possiamo affermare che il piano $\operatorname{Im} d\mathbf{x}_q$ è indipendente dalla parametrizzazione scelta. Se infatti hai un'altra parametrizzazione $\mathbf{y} : V \to S$ ($V \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto) con $p \in \mathbf{y}(V)$ ($p = \mathbf{y}(r)$, $r \in V$), le ipotesi della proposizione appena dimostrata sono senz'altro verificate, quindi $\operatorname{Im} d\mathbf{y}_r$ coincide anch'esso con l'insieme dei vettori tangenti a S in p, quindi vale sicuramente che $\operatorname{Im} d\mathbf{x}_q = \operatorname{Im} d\mathbf{y}_r$, che è l'indipendenza voluta. A questo punto, possiamo finalmente dare la definizione formale di piano tangente, che riassume anche la caratterizzazione appena dimostrata.

Definizione 3.8 (Piano tangente). *L'insieme di tutti i vettori tangenti a S in un dato punto $p \in S$ si dice piano tangente a S in p e si indica con T_pS. Per la proposizione dimostrata sopra, si ha che $T_pS = \operatorname{Im} d\mathbf{x}_q$, ove $\mathbf{x} : U \to S$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto) è una parametrizzazione locale tale che $p = \mathbf{x}(q) \in \mathbf{x}(U)$.*

La caratterizzazione data nella proposizione vista ci permette di operare concretamente col piano tangente. Per esempio (uso la notazione di cui sopra), siccome $T_pS = \operatorname{Im} d\mathbf{x}_q$, allora senz'altro $T_pS = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(q), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(q)\right\}$, poiché ovviamente quei due vettori generano $\operatorname{Im} d\mathbf{x}_q$. Non solo: poiché T_pS è un sottospazio di dimensione 2, quei due vettori costituiscono effettivamente una base di T_pS. Ovviamente la base del piano tangente è data rispetto ad un fissato sistema di parametri. D'ora in poi, per alleggerire le notazioni, poniamo $\mathbf{x}_u := \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ e $\mathbf{x}_v := \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$.

A questo punto, è interessante vedere come si possono esprimere le coordinate di un vettore $\mathbf{w} \in T_pS$ nella base specificata sopra. Per cominciare, usiamo la definizione di vettore tangente: troviamo una curva differenziabile parametrizzata $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{x}(U)$ tale che $\alpha(0) = p = \mathbf{x}(q)$ e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$ Ora, attenzione: definiamo una curva parametrizzata differenziabile $\beta := \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ tale che $\beta(t) := (u(t), v(t))$. Essa, come ci aspetteremmo, verifica $\beta(0) = \mathbf{x}^{-1}(p) =: q$. Allora abbiamo che $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ e vale:

$$\mathbf{w} = \alpha'(0) = d(\mathbf{x} \circ \beta)_0 = d\mathbf{x}_q \circ \beta'(0) = u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q)$$

Dunque $(u'(0), v'(0))$ sono le coordinate di $\mathbf{w}$ nella base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$. Notiamo con attenzione il modo in cui abbiamo espresso la curva α, visto che è una maniera canonica per esprimere qualsiasi curva appartenente ad un intorno coordinato di una data parametrizzazione. L'idea chiave sta tutta nella definizione di β: essa è data a partire da α e dalla parametrizzazione $\mathbf{x}$. In sostanza, applicando $\mathbf{x}^{-1}$ ad α, "riconduciamo" la curva α dalla superficie al dato sistema di parametri sul piano. Quello che troviamo è ovviamente ancora una curva, che è proprio β; chiamiamo convenzionalmente $(u(t), v(t))$ le sue componenti, rimarcando il fatto che si tratta di una curva appartenente al sistema di parametri di $\mathbf{x}$.

Ora, vogliamo dare una definizione di differenziale di mappe definite fra superfici; l'idea sarà quella di far intervenire il piano tangente. Siano dunque S_1 e S_2 due superfici regolari, $\varphi : V \to S_2$ ($V \subseteq S_1$ aperto) un'applicazione differenziabile. Se $p \in V$, ogni vettore $\mathbf{w}$ tangente a S_1 in p è per definizione espresso da $\mathbf{w} = \alpha'(0)$, con $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ una curva parametrizzata differenziabile tale che $\alpha(0) = p$. Definiamo ora la curva $\beta := \varphi \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_2$; notiamo che $\beta(0) = \varphi(p)$, quindi per la definizione stessa di vettore tangente si ha che $\beta'(0) \in T_{\varphi(p)}S_2$. Fatte queste premesse, dimostriamo una proposizione che ci permetterà di dare una buona definizione di differenziale di mappe fra superfici regolari in un dato punto.

Proposizione 3.8. *Nelle condizioni e nelle notazioni appena sopra espresse, fissato $\mathbf{w} \in T_pS_1$, il vettore $\beta'(0)$ non dipende dalla scelta di α. Inoltre la mappa $d\varphi_p : T_pS_1 \to T_{\varphi(p)}S_2$ definita da $d\varphi_p(\mathbf{w}) := \beta'(0)$ è lineare.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}(u, v)$ e $\widetilde{\mathbf{x}}(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ parametrizzazioni rispettivamente di S_1 e S_2 in intorni aperti di p e $\varphi(p)$. Supponi che φ sia espressa in questi parametri da:

$$\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))^{11}$$

E supponi che α sia data da:

$$\alpha(t) = (u(t), v(t))^{12}$$

Allora per definizione di $\beta = \varphi \circ \alpha$, si ha che $\beta(t) = (\varphi_1(u(t)), \varphi_2(v(t)))$. A questo punto per ottenere entrambi i risultati voluti ci basta differenziare quell'espressione in 0. Viene, usando la solita chain rule:

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p)u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(p)v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p)u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(p)v'(0) \right)$$

Questa prima relazione ci mostra che effettivamente $\beta'(0)$ non dipende da α. In realtà lo stesso calcolo porta a:

$$\beta'(0) = d\varphi_p(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che, come visto in un paragrafo precedente, le coordinate di $\mathbf{w}$ nella base di T_pS_1 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ sono date proprio da $(u'(0), v'(0))$. Nondimeno, anche se nelle notazioni la cosa è stata sottintesa, $\beta'(0)$ è espresso anch'esso nella base di $T_{\varphi(p)}S_2$ $\{\widetilde{\mathbf{x}}_{\widetilde{u}}, \widetilde{\mathbf{x}}_{\widetilde{v}}\}$, sempre ricordando le osservazioni fatte nel paragrafo citato (controllare con la notazione esplicita per credere). Questo, e la scrittura matriciale appena vista, ci assicura che $d\varphi_p : T_pS_1 \to T_{\varphi(p)}S_2$ è lineare, e quella espressa sopra è la sua matrice nelle basi $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e $\{\widetilde{\mathbf{x}}_{\widetilde{u}}, \widetilde{\mathbf{x}}_{\widetilde{v}}\}$ di T_pS_1 e $T_{\varphi(p)}S_2$. $\square$

A questo punto, riassumendo anche quanto ottenuto nella dimostrazione, possiamo dare la definizione voluta.

Definizione 3.9 (Differenziale di mappe tra superfici regolari)**.** *Date due superfici regolari S_1 e S_2, una funzione differenziabile $\varphi : V \to S_2$ ($V \subseteq S_1$ aperto), e un punto $p \in V$, l'applicazione lineare $d\varphi_p : T_pS_1 \to T_{\varphi(p)}S_2$ definita nella proposizione precedente è detta differenziale di φ in p. Inoltre essa è associata alla matrice:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(p) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(p) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

espressa nelle basi dei due piani tangenti T_pS_1 e $T_{\varphi(p)}S_2$ rispetto alle parametrizzazioni date per S_1 e S_2 in p e $\varphi(p)$.

[11] Un appunto sulla notazione usata: abbiamo scritto $\varphi(u,v)$ intendendo in realtà $(\widetilde{\mathbf{x}}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x})(u,v)$. Tale abuso di notazione è legato alla definizione di funzione differenziabile tra due superfici.

[12] Anche qui, si confonde α con $\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$. Questa tipologia di abusi di notazione, che sostanzialmente sottendono il concetto di "riportare tutto ai parametri" mediante le parametrizzazioni locali date (operazione già citata, che si fa spessissimo) saranno usati anche in seguito.

La proposizione dimostrata sopra assicura che il differenziale sia effettivamente ben definito. Si può seguire un procedimento simile per definire il differenziale di una mappa $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq S$ e S superficie regolare), ma non entro nei dettagli.

3.4 Prima forma fondamentale, area

Dopo aver definito differenziali e affini rispetto a superfici regolari, qualche proprietà e oggetto più geometrico. Per esempio, cerchiamo di definire qualcosa di simile ad un prodotto scalare su una certa superficie regolare S. La cosa più naturale da fare è prendere il solito prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e valutarlo per i vettori del piano tangente a S in $p \in S$. Insomma, definiamo molto semplicemente:

$$\langle \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \rangle_p := \langle \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \rangle , \quad \forall\, \mathbf{w_1}, \mathbf{w}_2 \in T_pS$$

A tale prodotto scalare corrisponde ovviamente una forma quadratica, che risulta essere decisamente importante.

Definizione 3.10 (Prima forma fondamentale)**.** *Data S una superficie regolare e un punto $p \in S$, la forma quadratica $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$ definita da:*

$$I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = |\mathbf{w}|^2 \geq 0$$

è detta prima forma fondamentale di S in p.

Ora, siccome la prima forma fondamentale altri non è che il prodotto scalare indotto sul sottospazio T_pS, è utile esprimerla nella base di T_pS Sia $\mathbf{x}(u, v)$ è una parametrizzazione di S in un intorno aperto di p, al solito; fissiamo allora un generico vettore tangente $\mathbf{w} \in T_pS$. Allora esiste una curva parametrizzata $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ ($t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$) tale che $\alpha(0) = p =: \mathbf{x}(u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Allora le coordinate di $\mathbf{w}$ nella base $\{\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)\}$ del piano tangente sono $(u'(0), v'(0))$, e viene:

$$\begin{aligned}
I_p(\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p \\
&= \left\langle \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0), \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0) \right\rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p u'(0)^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p v'(0)^2
\end{aligned}$$

ove nel calcolo ho sottinteso che $\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{x}_v = \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$. Adesso poniamo:

$$\begin{aligned}
E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \rangle_p \\
F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle_p \\
G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle_p
\end{aligned}$$

detti coefficienti della prima forma fondamentale in p. Per ovvi motivi di algebra lineare, determinare tali coefficienti mi rende nota I_p su tutto il piano tangente T_pS. A questo punto scriveremo:

$$I_p(\mathbf{w}) = E(u_0, v_0)u'(0)^2 + 2F(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + G(u_0, v_0)v'(0)^2$$

Ovviamente possiamo far variare p nell'intorno aperto in cui è a valori la parametrizzazione $\mathbf{x}$, ottenere quindi piani tangenti determinati al variare di (u, v) (in generale, puoi sempre scrivere $p = \mathbf{x}(u, v)$) con generica base $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v)\}$ e di conseguenza coefficienti della prima forma fondamentale dipendenti dal generico (u, v), cioè $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$. Queste funzioni di (u, v) risultano senz'altro differenziabili. Ora, due esempi:

- *Il piano.* Calcoliamo la prima forma fondamentale di un piano $P \subseteq \mathbb{R}^3$ passante per p_0 e con giacitura $\mathrm{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, ove $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono vettori ortonormali. Si può dare una parametrizzazione che lo copre completamente:

  $$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

  Per calcolare la prima forma fondamentale in un generico punto di p, notiamo che $\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1$ e $\mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$, e essi sono ortonormali. Da qui concludiamo subito che:

  $$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1$$

- *Il cilindro retto.* Il cilindro dato da $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ può essere parametrizzato con una sola parametrizzazione locale:

  $$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$$

  Per calcolare la prima forma fondamentale, notiamo che:

  $$\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$$

  Da cui, facendo il conto:

  $$E = \sin^2 u + \cos^2 u = 1, \quad F = 0, \quad G = 1$$

  Notiamo che i coefficienti sono gli stessi trovati per il piano, quindi ovviamente la prima forma fondamentale è la stessa per le due superfici.

Essendo la prima forma fondamentale una forma quadratica indotta sul piano tangente, permette di trattare problemi di natura metrica sulla superficie. In particolare:

- *Curve sulla superficie.* Se $\alpha : I \to S$ è una curva parametrizzata (S superficie regolare), ovviamente $\alpha'(t)$ può essere visto come vettore appartenente ad un certo piano tangente. Dunque ha senso valutare $I(\alpha'(t)) = |\alpha'(t)|^2$. La lunghezza d'arco:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\xi)|\, d\xi = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I(\alpha'(\xi))}\, d\xi$$

Se poi addirittura α appartiene ad un intorno coordinato di una certa parametrizzazione $\mathbf{x}(u,v)$ di S in quell'intorno, allora puoi scrivere $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, e di conseguenza anche la prima forma fondamentale $I(\alpha'(t))$ esplicitamente nelle coordinate $(u'(t), v'(t))$ di $\alpha'(t)$ nella base del piano tangente a S nel generico $\alpha(t)$. Viene, sottintendendo la dipendenza dalle variabili:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, d\xi$$

- *Angoli tra curve.* In generale, se due curve parametrizzate regolari $\alpha, \beta : I \to S$ si intersecano all'istante t_0[13] (cioè, $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$), l'angolo θ formato da tale intersezione è dato da:

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0||\beta'(t_0)|}$$

È intuitivo che sia così, in effetti ricordiamo che una curva è in ogni punto approssimata dal suo vettore tangente, e ha senso definire l'angolo formato dall'intersezione di due curve come l'angolo tra i vettori tangenti a ciascuna delle due curve nell'"istante di intersezione" t_0. Se poi α e β sono due curve coordinate di una parametrizzazione locale $\mathbf{x}$ S, cioè $\alpha(u) = \mathbf{x}(u,v)$ e $\beta(v) = \mathbf{x}(u,v)$ (nella prima supponi v fissato, nella seconda u fissato, così da avere per α e β un punto di intersezione $\mathbf{x}(u,v)$ generico), allora si trova con semplici calcoli che l'angolo formato è dato da (sottintendo la dipendenza dalla variabile (u,v)):

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u||\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Da questo risultato possiamo senz'altro concludere che *le curve coordinate di una parametrizzazione* $\mathbf{x}(u,v)$ *sono ortogonali se e solo se* $F(u,v) = 0$ *per ogni* (u,v). Una parametrizzazione con curve coordinate tutte ortogonali si dice *parametrizzazione ortogonale.*

[13]In realtà anche se non si intersecano allo stesso istante si può fare ugualmente la valutazione che segue, cambiando le cose dove serve.